II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

4. ПРОИЗВОДНАЯ

4.1. Определение, физический и геометрический смысл производной

Определение 4.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Производной этой функции в точке x_0 называется число

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad (4.1)$$

если этот предел существует и конечен (если предел бесконечен, то иногда говорят про бесконечную производную).

Операция нахождения производной функции называется дифференцированием этой функции.

Примеры. Найдите производные функций.
Решение.
1) $y = c \Rightarrow \Delta y = 0 \Rightarrow y'(x) = 0$.

2) $y = x^2 \Rightarrow y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$

3) $y = |x| \Rightarrow y'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{|\Delta x|}{\Delta x}$ – не существует, так как последняя дробь равна 1 при $\Delta x > 0$ и равна –1 при $\Delta x < 0$.

Физический смысл производной

Пусть $s = s(t)$ – путь, пройденный некоторой точкой за время t, тогда $s'(t_0) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v(t_0)$ – мгновенная скорость точки в момент времени t_0.

Геометрический смысл производной

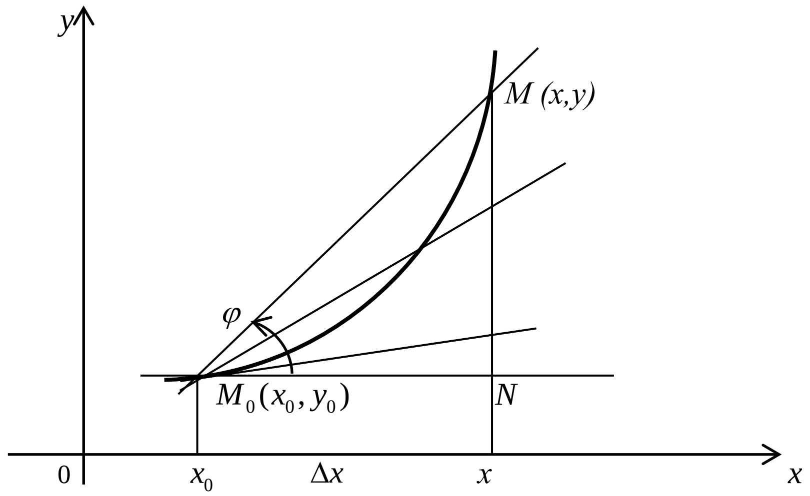

Рис. 16

Пусть M_0– фиксированная точка непрерывной кривой $y = f(x)$; M – произвольная точка этой кривой; проведем всевозможные секущие M_0M; предельное положение таких секущих при $\Delta x \to 0$ (или при $M \to M_0$), если такое существует, называется *касательной* к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 (рис. 16).

Рассматривая треугольник M_0MN, мы видим, что угловой коэффициент секущей $k = \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$ при $\Delta x \to 0$, если эта производная существует, значит предельное положение секущей, т.е. касательная, в точке x_0 существует тогда и только тогда, когда в этой точке существует производная $f'(x_0)$, которая и является угловым коэффициентом рассматриваемой касательной. Следовательно, используя уравнение по точке и угловому коэффициенту, мы можем записать уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0), \text{ или } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (4.2)$$

Нормалью к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ называется прямая, проведенная через эту точку перпендикулярно касательной в этой точке. Используя условие перпендикулярности прямых $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$, уравнение нормали можно записать в виде $y - f(x_0) = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Отметим также, что если $f'(x_0) = \infty$, то касательная к кривой в данной точке вертикальна, и ее уравнение имеет вид $x = x_0$.

Необходимое условие существования производной

Теорема 4.1. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$. Тогда эта функция непрерывна в точке x_0.

▲ $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) =$

$= \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim\limits_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$, а это равенство является одним из определений непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0. ■

Замечание. Пример 3) показывает, что обратная теорема неверна: функция $y = |x|$ не имеет производной в точке 0, хотя и является непрерывной в этой точке.

4.2. Вычисление производной функции

Теорема 4.2. Пусть в некоторой точке существовуют производные u' и v' тогда, в этой точке справедливы следующие равенства:

1) $c' = 0$;
2) $(u + v)' = u' + v'$;
3) $(u - v)' = u' - v'$;
4) $(uv)' = u'v + uv'$;
5) $(cu)' = cu'$;
6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ в любой точке, в которой v отлична от 0.

▲ 1) это пример 1) параграфа 4.1;

2) $(u+v)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{[u(x+\Delta x)+v(x+\Delta x)]-[u(x)+v(x)]}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = u' + v'$;

3) аналогично 2);

4) $(uv)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x+\Delta x)+u(x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} \lim\limits_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) + u(x) \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

(здесь, в частности, учтена непрерывность функции v, которая следует из существования ее производной);
из доказанной формулы следует, что
$(uvw)' =((uv)w)'=(uv)'w+(uv)w'=(u'v + uv')w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'$;
аналогично для большего числа сомножителей;

5) согласно 4), $(cu)' = c'u + cu' = 0 + cu' = cu'$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x)+u(x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x} =$

$= \dfrac{1}{v^2(x)} [v(x) \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} - u(x) \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}] = \dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

(здесь тоже учтена непрерывность v). ■

Теорема 4.3 (производная обратной функции). Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в точке x_0 имеет конечную и отличную от 0 производную $f'(x_0)$; пусть для функции $y = f(x)$ существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, непрерывная в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда в точке y_0 эта обратная функция имеет производную, равную $\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Это можно записать так: $x'_y(y_0) = \dfrac{1}{y'_x(x_0)}$ или, опуская аргументы, $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$.

▲ $x'_y(y_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$ (из существования обратной функции следует, что при $\Delta y \neq 0$ Δx тоже отлично от 0); из непрерывности обратной функции следует, что при $\Delta y \to 0$ Δx тоже будет стремиться к 0, следовательно,

$x'_y(y_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}} = \dfrac{1}{y'_x(x_0)}$. ■

Теорема 4.4 (о производной сложной функции). Пусть дана сложная функция $z = f(g(x))$. Пусть функция $y = g(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $z = f(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $z = f(g(x))$ также имеет производную в точке x_0 и $z'_x(x_0) = f'(y_0)g'(x_0)$. Опуская аргументы, последнее равенство можно записать в виде $z'_x = z'_y y'_x$.

▲ Дадим x приращение $\Delta x = x - x_0$, тогда y получит приращение $\Delta y = y - y_0$, а z получит соответствующее приращение $\Delta z = f(y) - f(y_0)$. Нам нужно найти $z'_x(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta x}$. Так как $f'_x(y_0) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta y}$ существует, то по теореме 2.6 $\dfrac{\Delta z}{\Delta y} = f'(y_0) + \alpha(\Delta y)$, где $\alpha(\Delta y)$ – бесконечно малая при $\Delta y \to 0$ функция. Отсюда $\Delta z = f'(y_0)\Delta y + \alpha(\Delta y)\Delta y$ и $\dfrac{\Delta z}{\Delta x} = f'(y_0)\dfrac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta y)\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Перейдем в последней формуле к пределу при $\Delta x \to 0$: так как функция $y = g(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке, значит при $\Delta x \to 0$ приращение Δy тоже стремиться к 0: $\Delta y \to 0$ и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(f'(y_0)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \alpha(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = f'(y_0)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\alpha(\Delta y)\cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= f'(y_0)g'(x_0) + \underbrace{\lim_{\Delta y \to 0}\alpha(\Delta y)}_{0}\cdot g'(x_0) = f'(y_0)g'(x_0).$$ ■

Таблица производных

1) $c' = 0$;

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, в частности $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

3) $(a^x)' = a^x \ln a$, в частности $(e^x)' = e^x$;

4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$, в частности $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

5) $(\sin x)' = \cos x$;

6) $(\cos x)' = -\sin x$;

7) $(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

8) $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11) $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

12) $(\mathrm{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

13) $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$;

14) $(\mathrm{ch}x)' = \mathrm{sh}x$;

15) $(\mathrm{th}x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;

16) $(\mathrm{cth}x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

▲ 1) Было доказано выше;

4) $y = \ln x \Rightarrow y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(1+\dfrac{\Delta x}{x})}{\dfrac{\Delta x}{x}x} = \dfrac{1}{x}$ (так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ =1);

5) $y = \sin x;\ y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos\dfrac{2x+\Delta x}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{2\dfrac{\Delta x}{2}} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2}) =$

$= \cos x$ (так как $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$);

6) $y = \cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \overset{\text{т. 4.4}}{\Rightarrow} y' = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)' = \sin x(-1) = -\sin x$;

7) $(\mathrm{tg}x)' = \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)' = \dfrac{\cos x\cos x + \sin x\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

8) аналогично;

9) пусть $y = \sin x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$ существует обратная функция $x = \arcsin y$; по теореме о производной обратной функции $x'_y = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, что, с заменой y на x и x на y, и доказывает нужное нам равенство;

10) так как $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, то $(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11) пусть $y = \operatorname{tg} x$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$ существует обратная функция $x = \operatorname{arctg} y$; по теореме о производной обратной функции $x'_y = \frac{1}{y'_x} = 1 : \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{tg^2 x + 1} = \frac{1}{y^2+1}$, что, с заменой y на x и x на y, и доказывает нужное нам равенство;

12) так как $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$, то $(\operatorname{arcctg} x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

Дадим определение гиперболических функций: гиперболическими синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом называются соответственно функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Как легко проверить, формулы для этих функций похожи на формулы для соответствующих тригонометрических функций, отличие может быть только в знаках, в частности, справедлива формула $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

Из данных определений имеем:

13) $(\operatorname{sh} x)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$;

14) $(\operatorname{ch} x)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$;

15) $(\operatorname{th} x)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

16) аналогично.

Теперь нам осталось доказать только формулы 1) и 2).

Логарифмическое дифференцирование

Пусть $y = f(x) > 0$ – некоторая функция, имеющая производную. Рассмотрим производную по x от $\ln y$. Согласно теореме 4.4, $(\ln y)'_x = \frac{1}{y} y'_x = \frac{1}{y} y'$. Такая производная называется логарифмической производной функции $y = f(x)$, а метод ее использования называется логарифмическим дифференцированием.

Применим этот метод для доказательства оставшихся формул 2) и 3):

2) $y = x^{\alpha} \Rightarrow \ln y = \alpha \ln x \Rightarrow \dfrac{1}{y} y' = \alpha \dfrac{1}{x} \Rightarrow y' = \alpha \dfrac{y}{x} = \alpha \dfrac{x^{\alpha}}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$;

3) $y = a^{x} \Rightarrow \ln y = x \ln a \Rightarrow \dfrac{1}{y} y' = \ln a \Rightarrow y' = y \ln a = a^{x} \ln a$. ■

В общем случае, метод логарифмического дифференцирования применяется для нахождения производных функций вида $y = f(x)^{g(x)}$: $\ln y = g(x) \ln f(x) \Rightarrow$ $\dfrac{1}{y} y' = g'(x) \ln f(x) + g(x) \dfrac{1}{f(x)} f'(x) \Rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \ln f(x) g'(x) + g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x)$, т.е. получаем сумму производных показательной и степенной функций.

Пример. Найти производную функции $y = (\sin x)^{x^2}$.
Решение.

$$y = (\sin x)^{x^2} \Rightarrow \ln y = x^2 \ln \sin x; \quad \frac{y'}{y} = 2x \ln \sin x + x^2 \frac{\cos x}{\sin x}; \quad y' = (\sin x)^{x^2} \left(2x \ln \sin x + x^2 \frac{\cos x}{\sin x} \right).$$

Производная неявной функции.

Пусть значения переменных x и y связаны между собой некоторым уравнением, которое, если все его члены перенести в левую часть, может быть записано в виде $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – некоторая функция двух переменных. Если для каждого значения x, принадлежащего некоторому множеству X, существует одно значение y, принадлежащее некоторому множеству Y, такое, что $F(x, y) = 0$, то этим определяется некоторая функция $y = y(x)$. Такая функция называется *неявной функцией*, заданной уравнением $F(x, y) = 0$.

Примеры неявных функций.

1) $x^2 + y^2 - a^2 = 0$, $x \in [-1,1]$, $y \in [0,1]$; в этом примере y можно выразить в виде $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.
2) $y - x - 0.25 \sin y = 0$, $x,y \in (-\infty, +\infty)$; в этом примере y выразить в явном виде через x нельзя.

Пусть неявная функция задана уравнением $F(x,y) = 0$. Укажем метод нахождения производной этой функции (считая, что эта производная существует). Пусть в нашем уравнении y является функцией от x: $y = y(x)$. Тогда уравнение превратится в тождество: $F(x,y(x)) \equiv 0$ ($\forall x \in X$) $\Rightarrow$ $F'_x(x,y(x)) = 0$ (производная по x берется в предположении, что y является функцией от x). Из последнего (линейного по y) уравнения можно выразить $y' = y'_x$.

Рассмотрим второй из приведенных выше примеров: $y' - 1 - 0.25 \cos y \cdot y' = 0 \Rightarrow y' = \dfrac{1}{1 - 0.25 \cos y}$.

Ответ, как мы видим, может зависеть не только от x, но и от y.

4.3. Дифференцируемые функции. Дифференциал

Определение 4.2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Обозначим $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ – соответствующее приращение функции. Функция $y = f(x)$

называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение Δy может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x, \qquad (4.3)$$

где A не зависит от Δx (но зависит от точки x_0): $A = A(x_0)$, а α зависит от Δx и x_0: $\alpha = \alpha(x_0, \Delta x)$ и является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$. В этом случае линейная относительно Δx функция $A\,\Delta x$ называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $d\,f(x_0) = d\,y(x_0)$ или просто $d\,y$.

Пример. Проверить, что функция $y = x^2$ дифференцируема и найти ее дифференциал.
Решение.
$y = x^2$; $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\,\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\,\Delta x + \Delta x\,\Delta x$; здесь $A = 2x_0$,
$\alpha = \Delta x$, следовательно, функция дифференцируема и $dy = 2x_0\,\Delta x$.

Так как при $\alpha \neq 0$ второй член в правой части формулы (4.3) является при $\Delta x \to 0$ бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx ($\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha\,\Delta x}{\Delta x} = 0$), то эту формулу можно записать в виде $\Delta y = A\,\Delta x + o(\Delta x)$. Таким образом, дифференциал функции (если он существует) представляет собой линейную функцию от Δx и отличается от приращения функции на величину $o(\Delta x)$. Поэтому говорят, что дифференциал функции это главная линейная часть приращения этой функции. Смысл введения понятия дифференциала заключается в том, что приращение функции Δy, которое может иметь достаточно сложный вид, в главном характеризуется более простой линейной функцией $A\,\Delta x$.

Теорема 4.5. Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела конечную производную. При этом в равенстве (4.3) $A = f'(x_0)$.

▲ *Необходимость.* Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 $\Rightarrow$ $\Delta y = A\,\Delta x + \alpha\,\Delta x$, где $A = A(x_0)$, $\alpha = \alpha(x_0, \Delta x)$ и α является бесконечно малой при $\Delta x \to 0 \Rightarrow \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha \Rightarrow \exists\ f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} (A + \alpha) = A$.

Достаточность. Пусть $\exists\ f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \overset{\text{т. 2.6}}{\Rightarrow} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, где $\alpha = \alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x \to 0$ функция $\Rightarrow$ $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \Rightarrow$ функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $A = f'(x_0)$. ■

Таким образом, фраза «функция дифференцируема в точке x_0» означает то же самое, что «функция имеет в точке x_0 конечную производную» и

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x, \text{ или } dy = y'\Delta x. \qquad (4.4)$$

Если отождествить дифференциал независимой переменной и ее приращение, т.е. положить $dx = \Delta x$, то получим также формулу $dy = y'dx$ ($\Rightarrow$ $y' = \dfrac{dy}{dx}$ – еще одно обозначение производной).

Пример. Найти дифференциал функции $y = x^2$.
Решение.
$y = x^2 \Rightarrow y' = 2x\Delta x = 2x\,dx$, что мы уже видели выше.

Геометрический смысл дифференциала

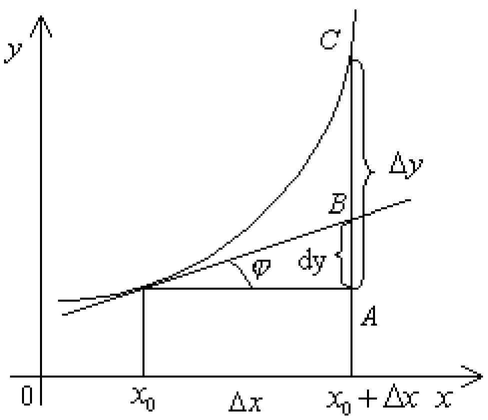

Рис. 17

На рис. 17 отрезок *AB* равен $\Delta x \cdot \operatorname{tg}\varphi = \Delta x \cdot y'(x_0) = dy(x_0)$. Т.е., если Δy – приращение ординаты кривой, то dy – приращение ординаты касательной к этой кривой.

Применение дифференциалов для приближенных вычислений

Для дифференцируемых функций $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. При приближенных вычислениях второй член в правой части этой формулы отбрасывают и полагают $\Delta y \approx dy \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\,\Delta x \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[5]{33}$.
Решение.
Рассмотрим функцию $y = \sqrt[5]{x}$. Положим $x_0 = 32$ и $\Delta x = 1 \Rightarrow \sqrt[5]{33} = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x =$
$= \sqrt[5]{32} + \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x_0^4}}1 = 2 + \dfrac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} = 2 + \dfrac{1}{5}\dfrac{1}{2^4} = 2 + \dfrac{1}{80}.$

Основные правила нахождения дифференциалов

1) $dc = c'dx = 0$;

пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в точке *x*, тогда в этой точке

2) $d(u\pm v)=(u\pm v)'dx=(u'\pm v')dx=u'dx\pm v'dx=du\pm dv$;
3) $d(uv)=(uv)'dx=(u'v+uv')dx=vu'dx+uv'dx=vdu+udv$;
4) $d\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'dx=\frac{u'v-uv'}{v^2}dx=\frac{vu'dx-uv'dx}{v^2}=\frac{vdu-udv}{v^2}$ (при $v(x)\neq 0$).

Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно выбора переменной

Пусть задана сложная функция $y = f(\varphi(t))$, где $x=\varphi(t)$, а $y=f(x)$. Пусть в некоторой точке t существует производная $x'_t=\varphi'(t)$, а в соответствующей точке $x=\varphi(t)$ существует производная $y'_x=f'(x)$, тогда по теореме о производной сложной функции 4.4 в точке t существует производная сложной функции $y'_t=y'_x x'_t$. По формуле (4.3), которая пока справедлива только для независимой переменной,

$$dy=y'_t dt=(y'_x x'_t)dt=y'_x(x'_t dt)=y'_x dx \Rightarrow dy=y'_x dx.$$

Таким образом, формула для записи дифференциала $dy=y'_x dx$ справедлива не только для независимой переменной x, но и в том случае, когда x является зависимой переменной (зависит от t). Только при этом dx уже не произвольное приращение независимой переменной: $dx=\Delta x$, а дифференциал функции $x=\varphi(t)$. Это свойство называется *инвариантностью формы дифференциала относительно выбора переменной.*

4.4. Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 4.3. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в каждой точке этой окрестности имеет конечную производную $y'=f'(x)$. Второй производной, или производной второго порядка функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется производная от ее первой производной в этой точке, если такая производная существует.

Таким образом, $f''(x_0)=[f'(x)]'_{x_0}$, или, опуская аргумент, $y''=(y')'$.

Аналогично определяется производная функции $y = f(x)$ любого порядка, т.е. по определению $y'''=(y'')',\ldots,y^{(n)}=(y)^{(n-1)}$.

Обозначения: $f''(x_0)=y''=\dfrac{d^2y}{dx^2}$, $y'''=\dfrac{d^3y}{dx^3}$; $y^{(4)}=y^{\mathrm{IV}}=\dfrac{d^4y}{dx^4},\ldots,y^{(n)}=\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

Под производной нулевого порядка функции понимается сама эта функция.

Замечание. Выше было показано, что если существует производная функции $f'(x_0)$ то функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0 и непрерывна в точке x_0. Пусть существует $f^{(n)}(x_0)$ $\Rightarrow$ $f^{(n-1)}(x)$ определена (т.е. существует) в окрестности точки x_0 (значит, и в самой точке x_0) и непрерывна в точке $x_0 \Rightarrow$ $f^{(n-2)}(x)$ определена (т.е. существует) в окрестности точки x_0 (значит, и в самой точке x_0) и непрерывна в точке x_0 и т.д. $\Rightarrow$ сама функция $y = f(x)$ и все ее производные до порядка $n - 1$ включительно существуют в окрестности точки x_0 и непрерывны в точке x_0.

Примеры. Найти n – ую производную функций.
Решение.

1) $y = e^x \Rightarrow y' = e^x \Rightarrow y'' = e^x, ..., y^{(n)} = e^x, x \in R$.

2) $y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y'' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}2\right)$

$\Rightarrow y''' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}2\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}2 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}3\right) \Rightarrow ... \Rightarrow y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), x \in R.$

3) Аналогично для $y = \cos x$, $y^{(n)} = \cos(x + \frac{\pi}{2}n), x \in R$.

4) $y = \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}, y'' = -\frac{1}{x^2}, y''' = \frac{2}{x^3}, y^{IV} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4}, ..., y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}, x > 0.$

Общие правила

Если в некоторой точке существуют n-ые производные функций u и v, очевидно, что в этой точке верны следующие формулы 1) и 2):

1) $(cu)^{(n)} = cu^{(n)}$;
2) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$;

3) *формула Лейбница* для нахождения производной любого порядка произведения двух функций $(uv)^{(n)}$:

$$(uv)' = u'v + uv';$$
$$(uv)'' = (u'v + uv')' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + v'';$$
$$(uv)''' = (u''v + 2u'v' + uv'')' = u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' =$$
$$= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''.$$

В общем случае из существования $u^{(n)}$ и $v^{(n)}$ следует:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}u^{(n-3)}v''' + ... + uv^{(n)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}. \qquad (4.5)$$

Строгое доказательство этой формулы можно, например, провести методом математической индукции.

Пример. Найти производную $(xe^x)^{(100)}$.
Решение.

$(xe^x)^{(100)} = (e^x)^{(100)}x + 100(e^x)^{(99)}x' + \frac{100 \cdot 99}{2!}(e^x)^{(98)}x'' + ... = e^x x + 100e^x + 0 = e^x(x + 100).$

Здесь было взято $u = e^x, v = x$.

Определение 4.4. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой на некотором множестве, если она дифференцируема (т.е. имеет конечную производную) в каждой точке этого множества.

Пусть $y = f(x)$ дифференцируемая на некотором множестве функция (x – независимая переменная). Тогда по формуле (4.4)

$$dy = f'(x)dx.$$

Здесь $f'(x)$ зависит от x, а dx – произвольное приращение x – от x не зависит, т.е. правая часть формулы зависит от x и от dx. Если dx зафиксировать, то правую часть этой формулы можно рассматривать как функцию только от x, значит можно говорить о дифференциале этой функции.

Определение 4.5. Вторым дифференциалом или дифференциалом 2 – го порядка функции $y = f(x)$ в некоторой точке называется дифференциал от ее первого дифференциала (если такой существует).
Обозначение: $d^2y = d^2 f(x)$.

Рассматривая dx в формуле $dy = f'(x)dx$ как постоянную, имеем:
$d^2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x))dx = (f'(x))'dxdx = f''(x)(dx)^2$.
Эта формула справедлива при существовании $f''(x)$. В правой части обычно скобки при dx опускают: $d^2y = f''(x)dx^2$.

Аналогично дается определение дифференциала любого порядка функции и выводится формула для его вычисления:
$d^3y = d(d^2y) = d(f''(x)dx^2) = d(f''(x))dx^2 = f'''(x)dxdx^2 = f'''(x)dx^3$
(при существовании $f'''(x)$) и, в общем случае, при существовании $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n \quad \text{или} \quad d^ny = y^{(n)}dx^n \tag{4.6}$$

(строгое доказательство легко провести методом математической индукции).

Замечание. Дифференциалы порядка выше 1 – го не обладают свойством инвариантности формы относительно выбора переменной. Покажем, например, это для $n = 2$. Пусть дана сложная функция $y = f(\varphi(t))$, где $x = \varphi(t)$, а $y = f(x)$. Используя формулу для дифференциала произведения двух функций и свойство инвариантности первого дифференциала относительно выбора переменной, имеем:
$d^2y = d(y'_x dx) = d(y')dx + y'd(dx) = y''_{x^2}dxdx + y'_x d^2x = y''_{x^2}dx^2 + d^2x$.
Так как, вообще говоря, $d^2x \neq 0$, то эта формула не совпадает с формулой $d^2y = y''_{x^2}dx^2$ для независимой переменной.

4.5. Функции, заданные параметрически, и их производные

Определение 4.6. Пусть при $t \in [t_1, t_2]$

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \tag{4.7}$$

Каждому значению $t \in [t_1, t_2]$ по формулам (4.7) соответствуют значения x и y, или точка на плоскости $0xy$ с такими координатами. При изменении t эта точка на плоскости описывает некоторую кривую. Уравнения (4.7) называются параметрическими уравнениями этой кривой, а число t называется параметром. Пусть функция $x = \varphi(t),\ t \in [t_1, t_2]$ имеет обратную $t = \varphi^{-1}(x), x \in [x_1, x_2]$. Тогда

$$y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) \qquad (4.8)$$

Т.е. уравнения (4.7) в этом случае определяют y как функцию от x. Тогда говорят, что функция y от x задана параметрически.

Переход от системы (4.7) к непосредственной зависимости y от x (если такой возможен) может осуществляться путем исключения параметра t.

Примеры функций и кривых, заданных параметрически.

1) $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad \Leftrightarrow x^2 + y^2 = r^2.$

Здесь каждому значению $t \in [0, 2\pi]$ соответствует точка окружности. При $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ получаем часть окружности в 1 - ой четверти, при $t = 0$ точку (r ,0), а при $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ точку (0 ,r) и т.д.

Для некоторых задач параметрические уравнения окружности удобнее обычных, так как из последних y выражается через x иррациональным образом.

2) Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ параметрически задается следующим образом: $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$, т.к.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2\cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2\sin^2 t}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$

3) $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ $t \in R,\ a > 0$. Выразить y через x из этих уравнений в явном виде нельзя (можно правда выразить x через y, но очень громоздким образом). Построим график, учитывая, что $y \ge 0$ и y есть четная функция t, а x есть возрастающая (т.к. t растет быстрее, чем sin$t$), нечетная функция t. При $t = 0$ получим точку (0,0), при $t = \pi$ точку $(a\pi, 2a)$, при $t = 2\pi$ точку $(2a\pi, 0)$ и т.д.

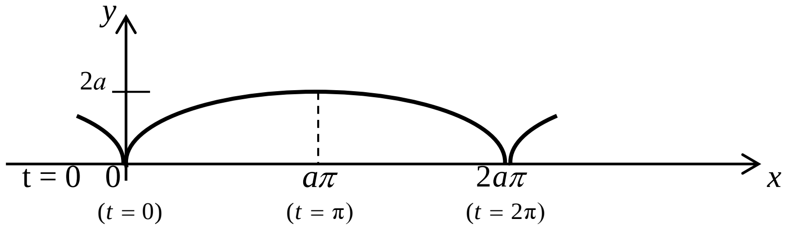

Рис. 18

Эта кривая называется *циклоидой* (рис. 18). При $t \in [0, 2\pi]$ получаем, как говорят, одну арку циклоиды. Можно показать, что циклоида описывается точкой, лежащей на окружности, если эта окружность катится вдоль некоторой прямой (например, точкой двигающегося колеса). На рис. 19 показано, как перемещается нижняя точка колеса при его движении вдоль прямой.

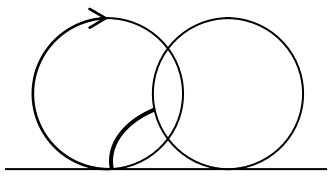

Рис. 19

Производные функции, заданной параметрически

Пусть функция задана параметрически, т.е. выполняются условия определения 4.6. Пусть функция $y=\psi(t)$ имеет производную $y'=\psi'(t)$, а для функции $x=\varphi(\mathrm{t})$ выполняются условия теоремы 4.3 о производной обратной функции. Тогда существует $t'_x=\dfrac{1}{x'_t}$. Отсюда по теореме 4.4 о производной сложной функции $y'_x=y'_t t'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$. Таким образом, в точке (*x*, *y*), соответствующей некоторому значению параметра *t*,

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}\text{, или }\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}. \tag{4.9}$$

Рассмотрим приведенный выше *пример* циклоиды:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Значение производной в примерах подобного типа зависит от *t*, но и это является полезной информацией о функции и ее графике. В нашем примере при $t=\frac{\pi}{2}$ $x=a(\frac{\pi}{2}-1),\ y=a,\ y'_x=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1\Rightarrow$ угол касательной с осью 0*x* равен $\frac{\pi}{4}$; при $t=\pi$ $x=a\pi,\ y=2a,\ y'=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0\Rightarrow$ касательная горизонтальна; при $t=0$ и $t=2\pi$ получим точки $(0,0)$ и $(2a\pi,0)$; так как $\lim\limits_{t\to 0}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=\infty$ и $\lim\limits_{t\to 2\pi}\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=\infty$, то касательные в этих точках вертикальны.

Производные высших порядков функции, заданной параметрически

Аналогично, при выполнении соответствующих условий, имеем:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y''_{x^2}=(y'_x)'_x=(y'_x)'_t t'_x=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t};\quad \frac{d^3y}{dx^3}=y'''_{x^3}=(y''_{x^2})'_x=(y''_{x^2})'_t t'_x=\frac{(y''_{x^2})'_t}{x'_t};\text{ и т.д.}$$

В частности, для циклоиды, учитывая уже найденную первую производную y'_x,

$$y''_{x^2}=\frac{\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)'}{a(1-\cos t)}=\frac{-\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-\cos t)}=\frac{-1}{2\sin^2\frac{t}{2}\,a2\sin^2\frac{t}{2}}=-\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}\text{ и т.д.}$$

5. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

5.1. Теоремы о среднем

Теорема 5.1 (Ферма). Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и во внутренней точке c этого отрезка (т.е. не на краю) принимает свое наибольшее (наименьшее) значение. Тогда, если в этой точке существует конечная производная $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

▲ $f'(c) = \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$. По условию теоремы этот предел существует и конечен.

Пусть для определенности в точке c функция принимает свое наибольшее значение $\Rightarrow f(c) \geq f(c + \Delta x) \Rightarrow$ числитель нашей дроби меньше или равен 0. Пусть $\Delta x > 0$, т.е. мы подходим к точке c справа. Тогда вся дробь меньше или равна 0 и, согласно задаче из параграфа 2.1, ее предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$. Теперь пусть $\Delta x < 0$, т.е. мы подходим к точке c слева. Тогда вся дробь больше или равна 0 и, по той же причине, ее предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$.

Из этих двух неравенств и единственности предела функции наш предел может только равняться 0, т.е. $f'(c) = 0$.■

Геометрический смысл теоремы Ферма. При выполнении условий теоремы Ферма, в точке, где функция принимает свое наибольшее (наименьшее) значение, касательная (если она существует) горизонтальна (рис. 20).

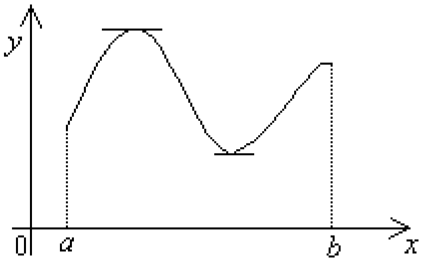

Рис.20

Замечание. Все условия теоремы 5.1 существенны для ее справедливости: в точке, в которой функция принимает наибольшее или наименьшее значение, ее производная может не существовать (рис. 21) или равняться ∞ (рис. 22); то, что c – внутренняя точка отрезка, также существенно (рис. 23; здесь наибольшее значение функции принимается на краю b отрезка, а производная $f'(b) \neq 0$).

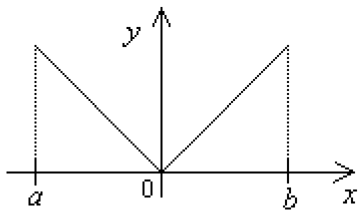

Рис. 21

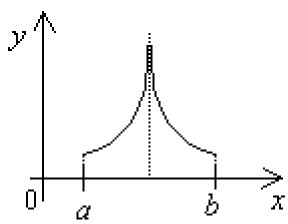

Рис. 22

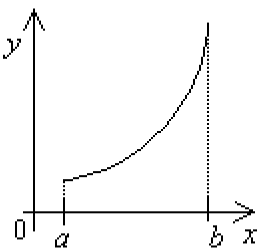

Рис. 23

Теорема 5.2 (Ролля). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную во всех внутренних точках этого отрезка. Пусть $f(a) = f(b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in [a, b]$ такая, что $f'(c) = 0$.

▲ Функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, следовательно, по теореме 3.7 она принимает на этом отрезке свои наибольшее M и наименьшее m значения. Возможны два случая:

1) $M = m$. В этом случае функция является постоянной и $f'(x) = M' = 0$ во всех точках интервала (a, b), т.е. в качестве точки с можно взять любую точку этого интервала.

2) $M \neq m$. Если бы оба этих значения принимались на краях отрезка, т.е. в точках a и b, то равенство $f(a) = f(b)$ не могло бы выполняться, значит, хотя бы одно из этих значений принимается во внутренней точке с отрезка. Но тогда для этой точки выполняются все условия теоремы Ферма, значит, по этой теореме $f'(c) = 0$.

Пример к теореме Ролля.

$y = 1 - \sqrt[3]{x^2}$; $y(-1) = y(1) = 0$, но $y' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \neq 0$.

Кажущееся противоречие с теоремой Ролля объясняется тем, что для данного примера эта теорема неприменима, так как во внутренней точке 0 отрезка $[-1, 1]$ наша функция производной не имеет.

Теорема 5.3 (Коши). Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены и непрерывны на отрезке $[a, b]$ и имеют конечные производные во всех внутренних точках этого отрезка, причем $g'(x) \neq 0$ при $x \in (a,b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a,b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \tag{5.1}$$

(знаменатель дроби в левой части отличен от 0, так как в противном случае по теореме Ролля производная функции $g(x)$ в некоторой точке интервала (a, b) равна 0, что противоречит условию теоремы).

▲ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)].$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: она определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, так как на этом отрезке определены и непрерывны $f(x)$ и $g(x)$, а остальные величины в правой части последней формулы постоянны; во всех внутренних точках отрезка она имеет конечную производную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x);$$

на концах отрезка эта функция принимает равные значения:

$$F(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(a) - g(a)] = 0,$$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(b) - g(a)] = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0.$$

Значит, по теореме Ролля существует точка $c \in (a,b)$, такая, что $F'(c) = 0$, т.е.

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) = 0 \text{, откуда}$$

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(c) \quad \text{и} \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} . \ ■$$

Замечание. Теорема верна и при $b < a$ (тогда $\frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$, и для получения нужной нам формулы осталось числитель и знаменатель дроби в левой части последней формулы умножить на –1).

Теорема 5.4 (Лагранжа). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную во всех внутренних точках этого отрезка. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad \text{или} \quad f(b)-f(a) = f'(c)(b-a). \qquad (5.2)$$

▲ Положим в теореме Коши $g(x) = x$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Коши, в частности $g'(x) = x' = 1 \neq 0$. Тогда в формуле (5.1) $g(b) = b$, $g(a) = a$ и $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f'(c)}{1}$. ■

Геометрический смысл теоремы Лагранжа

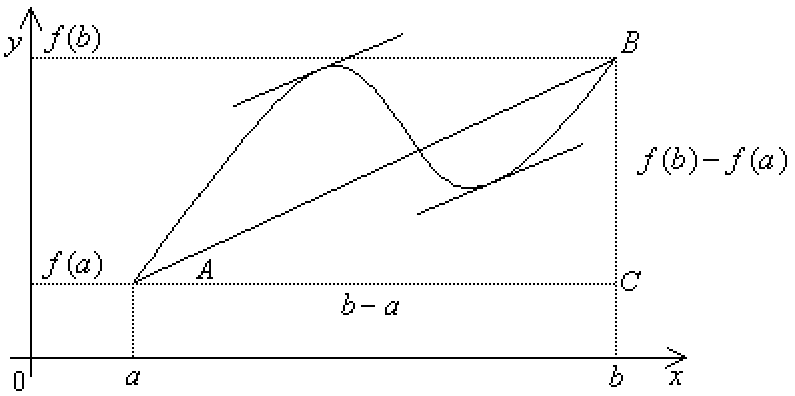

Рис.24

На рис. 24 угловой коэффициент прямой *AB*, т.е. $\text{tg}\angle BAC = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, а $f'(c)$ это угловой коэффициент касательной к кривой $y = f(x)$ в точке *c*. Теорема Лагранжа утверждает, что на интервале (a, b) существует хотя бы одна точка, в которой эти угловые коэффициенты равны, т.е. касательная параллельна прямой *AB*.

5.2. Правило Лопиталя

Теорема 5.5 (правило Лопиталя раскрытия неопределенностей). Пусть:

1) функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ определены в некоторой проколотой окрестности точки а $\overset{0}{U}(a)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$;

3) в нашей проколотой окрестности точки a функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x)\neq 0$;

4) существует (конечный или бесконечный) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует и

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.3}$$

Замечания:

1. Теорема означает, что при выполнении условий 1) - 4) предел отношения функций равен пределу отношения производных.

2. В левой части формулы (5.3) неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$, правило Лопиталя относится только к неопределенностям такого вида, другие неопределенности (способами, указанными ниже) нужно сводить к этим.

3. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ не существует, то правило Лопиталя не применимо, при этом $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ может и существовать.

4. Теорема верна и при $a=\infty$ (будет доказано ниже).

5. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ опять приводит к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ и $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют условиям, которые наложены на $f(x)$ и $g(x)$ в теореме 5.5, то можно применить правило Лопиталя еще раз.

▲ *Случай неопределенности вида* $\dfrac{0}{0}$.

Положим $f(a) = g(a) = 0$ (если функции в этой точке не определены, то доопределяем их таким образом; если они определены в точке a и не равны в ней 0, то меняем их значения в точке a, что не скажется на величине искомого $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, так как в определении предела функции при $x\to a$ x не равен a).

Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$.

Согласно определению 3.1, функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке a: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0,\ f(a)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$; $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0, g(a)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)$.

Эти функции будут непрерывны и в нашей окрестности $\overset{0}{U}(a)$, так как в любой точке этой окрестности они имеют производную (см. теорему 4.1).

Пусть x – произвольная точка окрестности $\overset{0}{U}(a)$. Тогда для отрезка $[a, x]$ (или $[x, a]$ – в зависимости от того, лежит ли x правее или левее a) выполняются все условия теоремы Коши, и по формуле (5.1) (согласно замечанию к теореме Коши, эта формула справедлива независимо от взаимного расположения точек a и b)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}\text{, где } c\in(a,x) \text{ или } c\in(x,a)\,. \tag{5.4}$$

При $x\to a$ $c\to a$, и так как $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ существует, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Значит, существует и предел левой части формулы (5.4) и $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

▲ *Случай неопределенности вида* $\frac{\infty}{\infty}$ более сложен. Пусть $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}= K$ и K конечно. Зададим произвольное $\varepsilon>0$. Согласно определению предела функции 2.5, существует $\delta>0$ такое, что при $x\in\overset{0}{U}(a,\delta)$

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)}-K\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}-K<\frac{\varepsilon}{2} \quad\Leftrightarrow\quad K-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(x)}{g'(x)}<K+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.5}$$

Пусть $x\in\overset{0}{U}(a,\delta)$. В нашем случае применить теорему Коши к отрезку $[a, x]$ нельзя, так как функции $f(x)$ и $g(x)$ не будут непрерывными в точке a, ибо $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$. Поэтому возьмем произвольный $x_0\in\overset{0}{U}(a,\delta)$ и применим теорему Коши к отрезку с краями x и x_0: $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$, где c находится между точками x и x_0. Из (5.5) следует, что $K-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f'(c)}{g'(c)}<K+\frac{\varepsilon}{2}$, значит

$$K-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}<K+\frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.6}$$

Нам надо доказать, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K$. Так как $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}\cdot\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}. \tag{5.7}$$

Зафиксируем в этой формуле x_0, оставляя x переменным. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to a}\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}=1$, и по теореме 2.6, $\frac{1-\frac{g(x_0)}{g(x)}}{1-\frac{f(x_0)}{f(x)}}=1+\alpha(x)$, где $\alpha(x)-$ бесконечно малая при $x\to a$ функция. Значит, формулу (5.7) можно переписать в виде

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}(1+\alpha(x))\,. \tag{5.8}$$

Теперь умножим все части формулы (5.6) на $1+\alpha(x)$:
$\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)(1+\alpha(x))<\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}(1+\alpha(x))<\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)(1+\alpha(x))$, значит (5.8) даёт, что

$$\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)(1+\alpha(x))<\frac{f(x)}{g(x)}<\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)(1+\alpha(x)),\ \text{или}$$

$$K-\frac{\varepsilon}{2}+\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x)<\frac{f(x)}{g(x)}<K+\frac{\varepsilon}{2}+\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x). \qquad (5.9)$$

Так как $\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x)$ и $\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x)$, как произведения бесконечно малой на постоянную, есть величины бесконечно малые при $x\to a$, то существует $\delta_1>0$ такое, что при $x\in \overset{0}{U}(a,\delta_1)$ справедливы неравенства $\left|\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, $\left|\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, откуда $\left(K-\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x)>-\frac{\varepsilon}{2}$ и $\left(K+\frac{\varepsilon}{2}\right)\alpha(x)<\frac{\varepsilon}{2}$. Уменьшая левую и увеличивая правую часть неравенства (5.9), имеем, что при $x\in \overset{0}{U}(a,\min(\delta,\delta_1))$ выполняется неравенство: $K-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{f(x)}{g(x)}<K+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}$, или

$$K-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<K+\varepsilon. \qquad (5.10)$$

Так как в последнем неравенстве $\varepsilon>0-$ произвольно, то это неравенство и означает, что $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=K$.

Теорема доказана для конечного *K*, если же теперь $K=\infty$, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0$, тогда, по уже доказанному, $\lim\limits_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0$, но тогда $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, т.е. опять $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Осталось разобрать случай $a=\infty$. В обоих случаях неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ для нахождения $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ произведем замену $x=\frac{1}{t}$. Обозначая $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right), G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$, имеем: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}$. Легко видеть, что *F*(*t*) и *G*(*t*) удовлетворяют условиям правила Лопиталя при $t\to 0$, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{G(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to 0}\frac{F'_x x'_t}{G'_x x'_t}=\lim_{t\to 0}\frac{F'_x}{G'_x}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)'_x}{g\left(\frac{1}{t}\right)'_x}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \ \blacksquare$$

Примеры раскрытия неопределенностей. Найти пределы функций.
Решение.

1) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}+1}{\sqrt{2+x}+x}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}+1}=\dfrac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{2}+1}=\dfrac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{4}{9}$.

Это неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$; все условия теоремы 5.5 выполнены: числитель и знаменатель дроби определены, непрерывны и дифференцируемы в проколотой окрестности точки –1, причем в этой окрестности производная знаменателя отлична от 0; предел отношения производных существует и равен $\dfrac{4}{9}$, значит, существует предел отношения функций, и этот предел тоже равен $\dfrac{4}{9}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}-2x}{x-\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{1-\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{\cos x}=2$.

Так как последний предел существует и равен 2, то предпоследний предел тоже существует и равен 2 и т.д.

3) При $x\to+\infty$ функции $x^{k}\,(k>0),\,a^{x}\,(a>1),\log_{a}x(a>1)$ являются бесконечно большими. Выясним, какая из них растет быстрее. Для этого вычислим два предела вида $\dfrac{\infty}{\infty}$:

а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_{a}x}{x^{k}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\ln a\cdot kx^{k-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{k\ln a\cdot x^{k}}=0$.

Таким образом, при $x\to+\infty$ степенная функция растет быстрее логарифмической.

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{k}}{a^{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{kx^{k-1}}{a^{x}\ln a}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k(k-1)x^{k-2}}{a^{x}\ln^{2}a}=\ldots$

В этом пределе все время получается неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, но, на каком-то шаге, степень *x* в числителе дроби либо станет равной 0 (при целом k), либо станет отрицательной (при k не целом), тогда x из числителя «уйдет», и так как предел знаменателя равен ∞, то предел всей дроби будет равен 0.
Таким образом, при $x\to+\infty$ показательная функция растет быстрее степенной.

4) Вышеприведенные примеры показывают, что во многих случаях правило Лопиталя существенно сокращает и упрощает раскрытие неопределенностей. Однако не следует думать, что правило Лопиталя является универсальным средством для этих целей и методы вычисления пределов, изложенные выше в главе 2, больше не нужны. Для иллюстрации этого рассмотрим следующий предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$. Так как при $x\to\infty$ x растет быстрее, чем sin*x*, то наш предел является неопределенностью вида $\dfrac{\infty}{\infty}$; разделив числитель и знаменатель на *x*, предел можно вычислить следующим образом:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x\cdot\dfrac{1}{x}}{1+\sin x\cdot\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{1}=1$ (так как $\sin x\cdot\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty$ – это произведение бесконечно малой $\dfrac{1}{x}$ на ограниченную $\sin x$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x\cdot\dfrac{1}{x}=0$).

Ошибочный метод состоит в попытке применить правило Лопиталя без проверки справедливости условий теоремы 5.5:

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{-\sin x}=-1$.

Правильный ответ, естественно, равен 1, а из трех равенств в предыдущей строчке справедливо лишь последнее, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}$, а последний предел не существует.

5) $\lim\limits_{x\to+0}\sin x\cdot\ln x$.

Это уже неопределенность вида $0\cdot\infty$. Такие неопределенности сводятся к неопределенностям вида $\dfrac{0}{0}$ или $\dfrac{\infty}{\infty}$ преобразованием произведения в дробь путем использования отрицательной степени:

$$\lim_{x\to+0}\sin x\cdot\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\sin^{-1}x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\sin^{-2}x\cos x}=-\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}\overset{\frac{0}{0}}{=}-\lim_{x\to+0}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x-x\sin x}=\frac{0}{1}=0.$$

Заметим здесь, что при другом возможном преобразовании пример только усложняется:

$$\lim_{x\to+0}\sin x\cdot\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\sin x}{\ln^{-1}x}=\lim_{x\to+0}\frac{\cos x}{-\ln^{-2}x\,\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to+0}x\cos x\ln^2 x,$$

что опять является неопределенностью вида $0\cdot\infty$, только записанной в более сложной форме. На этом примере видно, что, как правило, логарифмическую и обратные тригонометрические функции переводить в знаменатель не целесообразно.

6) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

Это неопределенность вида 1^∞, которая (как и неопределенности вида 0^0 и ∞^0) раскрывается путем логарифмирования выражения под знаком предела, которое мы обозначим *y*. А именно, вместо исходного предела $\lim\limits_{x\to 0}y$ рассмотрим

$$\lim_{x\to 0}\ln y=\lim_{x\to 0}\frac{3}{x^2}\ln\cos 2x=3\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}3\lim_{x\to 0}\frac{-\sin 2x\cdot 2}{\cos 2x\cdot 2x}=-6\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}=-6.$$

Тогда, в силу непрерывности показательной функции, $\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln y}=\lim\limits_{x\to 0}y=e^{-6}$.

Введя обозначение $e^x=\exp(x)$, решение этого примера можно записать и по-другому:

$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to 0}\exp\left(\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\right)=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\ln\cos 2x}{x^2}\right)$, что, как показано выше, даёт $\exp(-6)=e^{-6}$.

5.3. Формула Тейлора

Формула Тейлора для многочлена

Пусть $P_n(x)$ - многочлен степени *n*, т.е.

$$P_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n.$$

Возьмем произвольную точку x_0 и преобразуем $P_n(x)$ следующим образом:

$$P_n(x)=a_0+a_1((x-x_0)+x_0)+a_2((x-x_0)+x_0)^2+\ldots+((x-x_0)+x_0)^n.$$

Возводя в степень согласно формуле бинома Ньютона, и собирая вместе члены с одинаковыми степенями $x-x_0$, запишем $P_n(x)$ следующим образом:

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+...+c_n(x-x_0)^n=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k. \qquad (5.11)$$

Первый член правой части этой формулы (при $k=0$) есть постоянная c_0. Возьмем производную от обеих частей формулы (5.11), учитывая, что производная постоянной равна 0:

$$P_n'(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k k(x-x_0)^{k-1}.$$

Первый член правой части этой формулы (при $k=1$) есть постоянная c_1. Снова дифференцируем равенство по x, учитывая, что производная постоянной равна 0:

$$P_n''(x)=\sum_{k=2}^{n}c_k k(k-1)(x-x_0)^{k-2}.$$

И т.д. В общем виде получаем, что

$$P_n^{(m)}(x)=\sum_{k=m}^{n}c_k k(k-1)...(k-m+1)(x-x_0)^{k-m}.$$

Подставим в эту формулу $x=x_0$. При этом все члены правой части, кроме первого (при $k=m$) будут равны 0, и мы получим, что

$$P_n^{(m)}(x_0)=c_m m(m-1)...(m-m+1)=c_m m!, \quad \text{откуда} \quad c_m=\frac{P_n^{(m)}(x_0)}{m!}, \quad m=0,1,...,n.$$

Заменяя здесь m на k, имеем равенства для коэффициентов формулы (5.11):

$$c_k=\frac{P_n(x_0)}{k!}, \quad k=0,1,...,n. \qquad (5.12)$$

Подставляя эти коэффициенты в формулу (5.11), имеем:

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \qquad (5.13)$$

Формула (5.13) называется *формулой Тейлора* для многочлена.

Формула Тейлора для **n + 1** *раз дифференцируемой функции*

Пусть функция $y = f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, т.е. имеет в этой окрестности все производные до порядка $n+1$ включительно. Тогда формула (5.13) не может быть верной, так как в левой ее части произвольная функция, а в правой – многочлен. Нужно эту формулу как-то «подправить». Возьмем некоторый x из нашей окрестности и положим

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x), \qquad (5.14)$$

где $r_n(x)$ – так называемый остаточный член формулы Тейлора,

$$r_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \qquad (5.15)$$

Возможны различные формы записи остаточного члена, мы рассмотрим только две из них. Сначала будем искать остаточный член в виде, похожем на следующее слагаемое из правой части формулы (5.14):

$$r_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} q(x), \tag{5.16}$$

где $q(x)$ зависит от x, т.е. является некоторой функцией x, которую нужно определить (такое представление всегда возможно: $q(x) = \frac{r_n(x)(n+1)!}{(x-x_0)^{n+1}}$). Тогда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} q(x). \tag{5.17}$$

На отрезке $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$ - в зависимости от того, x правее или левее x_0) рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{q(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}. \tag{5.18}$$

Проверим, что эта функция удовлетворяет на нашем отрезке всем условиям теоремы Ролля:

а) Как функция t, она определена и непрерывна на отрезке, ибо из существования каждой производной функции следует непрерывность ее предыдущей производной $\Rightarrow$ из существования на нашем отрезке $f^{(k)}(t),\ k = 0,\ 1,\ 2, ...,\ n+1$ следует непрерывность $f^{(k)}(t),\ k = 0,\ 1,\ 2, ...,\ n$ на этом отрезке.

б) Во всех внутренних точках отрезка $F(t)$ имеет конечную производную; для доказательства этого просто найдем эту производную: из (5.18), учитывая правило нахождения производной произведения,

$$F'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!} k (x-t)^{k-1}(-1) - \frac{q(x)}{(n+1)!}(n+1)(x-t)^n(-1) =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} + \frac{q(x)}{n!}(x-t)^n.$$

При последнем переходе учтено, что во второй сумме первое слагаемое (при $k = 0$) равно 0, и определение факториала числа $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-1)n$.

Во второй сумме последней формулы обозначим $k - 1 = m$. Тогда эту формулу можно переписать в виде

$$F'(t) = -\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(t)}{m!}(x-t)^m + \frac{q(x)}{n!}(x-t)^n.$$

Теперь слагаемые второй суммы сокращаются с соответствующими слагаемыми первой суммы, в результате останется только первое слагаемое первой суммы и

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \frac{q(x)}{n!}(x-t)^n. \tag{5.19}$$

Последняя формула и доказывает существование $F'(t)$ во всех внутренних точках отрезка $[x_0, x]$ (или $[x, x_0]$).

в) На краях отрезка функция $F(t)$ принимает одинаковые значения:

Выделив первое слагаемое суммы, перепишем (5.18) в виде:

$F(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k - \frac{q(x)}{(n+1)!}(x-t)^{n+1}$, откуда, при $t = x$, $F(x) = 0$.

Теперь подставим в (5.18) $t = x_0$:

$F(x_0) = f(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{q(x)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, что равно 0, согласно (5.17).

Таким образом, $F(x) = F(x_0) = 0$.

Условия теоремы Ролля выполняются, значит, существует $c \in [x_0, x]$ (или $[x, x_0]$) такая, что $F'(c) = 0$, т.е., согласно (5.19),

$-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{q(x)}{n!}(x-c)^n = 0 \Rightarrow q(x) = f^{(n+1)}(c)$. Из (5.16) теперь следует, что существует $c \in [x_0, x]$ (или $[x, x_0]$) такая, что

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \qquad (5.20)$$

Остаточный член (5.20) называют *остаточным членом в форме Лагранжа*.

Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема 5.6. Если функция $y = f(x)$ $n+1$ раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0, то для всех *x* из этой окрестности

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = \qquad (5.21)$$

$$= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

В этой формуле *c* – точка между x_0 и *x*, которую еще можно записать в виде $c = x_0 + \theta(x-x_0)$, где $0 < \theta < 1$. Формулу (5.21) называют *формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа*.

Замечания.

1. Смысл формулы Тейлора состоит в том, что с точностью до остаточного члена функция в окрестности точки x_0 представляется в виде многочлена по степеням $x - x_0$, а многочлен изучать проще, чем произвольную функцию.
2. Остаточный член в форме Лагранжа имеет тот же вид, что предыдущие члены формулы, но производная берется уже не в точке x_0, а в промежуточной точке с.
3. Отбросив в формуле (5.21) остаточный член, мы получаем формулу для приближенных вычислений $\quad f(x) \approx \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

Погрешность этой формулы равна остаточному члену $r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, где *c* – промежуточная точка между x_0 и *x*. Хотя точно значение *c* определить нельзя, мы можем оценить погрешность, т.е. указать, чего она, заведомо, не превосходит.

В качестве *примера* рассмотрим задачу приближенного вычисления $\sqrt[5]{33}$, которая уже решалась при помощи понятия дифференциала в параграфе 4.3. В нем был получен ответ $2+\frac{1}{80}$, причем погрешность вычислений оценить мы тогда не могли. Теперь мы можем продвинуться гораздо дальше:

Рассмотрим функцию $y = f(x) = \sqrt[5]{x}$ и возьмем $x_0 = 32 \Rightarrow f(x_0) = \sqrt[5]{32} = 2$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}};\quad f''(x) = -\frac{4}{25}x^{-\frac{9}{5}} = -\frac{4}{25\sqrt[5]{x^9}};\quad f'''(x) = \frac{36}{125}x^{-\frac{14}{5}} = \frac{36}{125\sqrt[5]{x^{14}}};$$

$$f'(32) = \frac{1}{5\sqrt[5]{32^4}} = \frac{1}{5\cdot 2^4} = \frac{1}{80};\ f''(32) = -\frac{4}{25\cdot 2^9} = -\frac{1}{25\cdot 2^7} = -\frac{1}{3200};\ f'''(c) = \frac{36}{125\sqrt[5]{c^{14}}}.$$

По формуле (5.21) $\sqrt[5]{x} = f(32) + \frac{f'(32)}{1!}(x-32) + \frac{f''(32)}{2!}(x-32)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-32)^3$.

При $x = 33$ отсюда получаем $x - 32 = 1$ и

$$\sqrt[5]{33} = 2 + \frac{1}{80} - \frac{1}{2\cdot 3200} + \frac{36}{6\cdot 125\sqrt[5]{c^{14}}} = 2 + \frac{1}{80} - \frac{1}{6400} + \frac{6}{125\sqrt[5]{c^{14}}}.$$

Отбрасывая остаточный член, получаем приближенно $\sqrt[5]{33} \approx 2 + \frac{1}{80} - \frac{1}{6400}$. Погрешность при этом не превосходит отброшенного остаточного члена, в котором с находится между $x_0 = 32$ и $x = 33$. Наибольшее значение этой погрешности будет при наименьшем значении ее знаменателя, т.е. при $c = 32$. Значит, погрешность наших вычислений не превосходит

$$\frac{6}{125\sqrt[5]{32^{14}}} = \frac{6}{125\cdot 2^{14}} = \frac{3}{1000\cdot 2^{10}} = \frac{3}{1024000}.$$

4. При $x_0 = 0$ (5.20) превращается в так называемую формулу Маклорена:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \tag{5.22}$$

Здесь c – промежуточная точка между 0 и x, или $c = \theta x, 0 < \theta < 1$.

Теорема 5.7 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 все производные до порядка n включительно. Тогда

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n) = \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n). \end{aligned} \tag{5.23}$$

По сравнению с теоремой 5.6 здесь на функцию наложено меньше условий, зато и результат дает лишь порядок малости остаточного члена $r_n(x)$: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$.

▲ Согласно замечанию в параграфе 4.4, функция $y = f(x)$ и все ее производные до порядка $n - 1$ включительно существуют в окрестности точки x_0 и непрерывны в точке x_0. Положим

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \qquad (5.24)$$

$$r_n(x)=f(x)-P(x). \qquad (5.25)$$

Аналогично предыдущему, из (5.24)

$P'(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}k(x-x_0)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-1)!}(x-x_0)^{k-1}, P''(x)=\sum_{k=2}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-2)!}(x-x_0)^{k-2}$ и т.д. В общем случае

$$P^{(m)}(x)=\sum_{k=m}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{(k-m)!}(x-x_0)^{k-m},\quad m=0,\ 1,...,\ n. \qquad (5.26)$$

При подстановке $x=x_0$ в сумме останется только одно (первое) слагаемое и

$$P^{(m)}(x_0)=f^{(m)}(x_0),\quad m=0,\ 1,...,\ n. \qquad (5.27)$$

Из (5.27) следует, что

$$r_n^{(m)}(x_0)=f^{(m)}(x_0)-P^{(m)}(x_0)=0,\quad m=0,\ 1,...,\ n. \qquad (5.28)$$

Теперь, используя (5.28), для доказательства нужного нам утверждения применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{r_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}}\overset{\frac{0}{0}}{=}...=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdot...\cdot 2(x-x_0)}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n-1)}(x)-r_n^{(n-1)}(x_0)}{n!(x-x_0)}=\frac{1}{n!}r_n^{(n)}(x_0)=0.$$

(На последнем шаге, добавив член $r_n^{(n-1)}(x_0)=0$, мы, вместо правила Лопиталя, применили определение производной, ибо непрерывность $r_n^{(n)}(x)$ в точке x_0 нам уже не дана, и переход к $\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{1}{n!}r_n^{(n)}(x_0)=0$ был бы неверным.) ■

Для такой формы остаточного члена формула Маклорена принимает вид:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n). \qquad (5.29)$$

Разложения по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

Применим формулы (5.22) и (5.29) к некоторым функциям:

1) $\underline{f(x)=e^x.}$

Для этой функции $f^{(k)}(x)=e^x\Rightarrow f^{(k)}(0)=e^0=1$ и

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{n!}+r_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+r_n(x),$$

где $r_n(x)=o(x^n)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, c=\theta x, 0<\theta<1$. Так как наша функция имеет производные всех порядков в любой точке, то формула справедлива для всех x.

Применим эту формулу для приближенного вычисления числа e. Подставляя в нее $x = 1$, беря, например, пять членов и отбрасывая остаточный член, получаем, что

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{48+12+4+1}{24}=\frac{65}{24}(\approx 2.708).$$

Погрешность результата $\frac{65}{24}$ равна $\frac{e^c}{5!}$, где $c=\theta,\ 0<\theta<1$, значит, эта погрешность не превосходит $\frac{e}{5!}$. Как доказывалось в параграфе 2.5, $e \le 3$, поэтому наша погрешность не превосходит $\frac{3}{5!}=\frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=\frac{1}{40}$.

2) $\underline{f(x)=\sin x}$.

$$f'(x)=\cos x,\ f''(x)=-\sin x,\ f'''(x)=-\cos x,\ f^{iv}(x)=\sin x,\ldots \overset{\substack{\text{пример 2}\\ \text{параграфа 4.4}}}{\Rightarrow} f^{(k)}(x)=\sin(x+\frac{\pi}{2}k);$$

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{iv}(0)=0,\ldots \Rightarrow f^{(k)}(0)=\sin\frac{\pi}{2}k.$$

Таким образом, в формулах (5.22) и (5.29) остаются только члены с нечетными степенями x, и эти формулы принимают вид

$$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+r(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+r(x),$$

где $r(x)-$остаточный член в форме Лагранжа или Пеано. Так как функция имеет производные всех порядков в любой точке, то разложение справедливо для всех x.

3) $\underline{f(x)=\cos x}$.

Аналогично предыдущему примеру,

$$f'(x)=-\sin x,\ f''(x)=-\cos x,\ f'''(x)=\sin x,\ f^{iv}(x)=\cos x,\ldots \overset{\substack{\text{пример 3}\\ \text{параграфа 4.4}}}{\Rightarrow} f^{(k)}(x)=\cos(x+\frac{\pi}{2}k);$$

$$f(0)=1,\ f'(0)=0,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=0,\ f^{iv}(0)=1,\ldots \Rightarrow f^{(k)}(0)=\cos\frac{\pi}{2}k.$$

Теперь в формулах (5.22) и (5.29) остаются только члены с четными степенями x, и эти формулы принимают вид

$$\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+r(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+r(x),$$

где $r_n(x)-$ остаточный член в форме Лагранжа или Пеано. Так как функция имеет производные всех порядков в любой точке, то разложение справедливо для всех x.

4) $\underline{f(x)=\ln(1+x)}$.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\ f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\ f'''(x)=\frac{2}{(1+x)^3}'\ f^{iv}(x)=-\frac{2\cdot 3}{(1+x)^4},\ldots,\ f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k};$$

$$f'(0)=1,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=2,\ f^{iv}(0)=-2\cdot 3,\ldots,\ f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!.$$

Теперь разложения (5.22) и (5.29) выглядят так:

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^k+r_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}+r_n(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+r_n(x).$$

В этой формуле $r_n(x)$ – остаточный член в форме Лагранжа или Пеано: $r_n(x)=\dfrac{(-1)^n n!x^{n+1}}{(n+1)!(1+c)^{n+1}}=\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+c)^{n+1}}$, где c – точка между 0 и x, $c=\theta x, 0<\theta<1$, $r_n(x)=o(x^n)$. Наша функция имеет производные любого порядка на интервале (–1, 1) (в точке –1 у функции разрыв), поэтому наше разложение справедливо на этом интервале.

5) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$.

$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $f'''(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3},\ldots,$

$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$;

$f(0)=1, f'(0)=\alpha, f''(0)=\alpha(\alpha-1), f''(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2),\ldots, f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1).$

Разложения (5.22) и (5.29) имеют вид:

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+r_n(x)=$$

$$=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x).$$

Заметим, что эта формула похожа на формулу бинома Ньютона (1.3) при $a=1$ и $b=x$. При натуральном α и $n=\alpha$ из нее как раз получаем (1.3) ($r_n(x)=0$).

В частности, при $\alpha=-1$ и $x\in(-1,1)$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)(-2)\ldots(-k)}{k!}x^k+r_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k k!}{k!}x^k+r_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k+r_n(x)=$$

$$=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+r_n(x).$$

Заменяя в обеих частях этой формулы x на $-x$, получаем, что при $x\in(-1,1)$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(-x)^k+r_n(-x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{2k}x^k+r_n(-x)=\sum_{k=0}^{n}x^k+r_n(-x)=$$

$$=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+r_n(-x).$$

Из полученных выше разложений можно получать разложения других функций.

Примеры.

1) Разложить по формуле Маклорена функцию $y=\text{sh}x$.

Решение.

$$\text{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k}{k!}\right)+o(x^n)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}(x^k-(-1)^k x^k)+o(x^n)$$

(остаточный член в форме Пеано будет разностью двух бесконечно малых более высокого порядка, чем x^n, т.е. опять будет бесконечно малой более высокого порядка, чем x^n; для получения разложения функции e^{-x} мы заменили в разложении функции e^{-x} x на $-x$).

Выражение по знаком суммы будет равно 0 при четном k и будет равно 2 при к нечетном, $k=2m+1$, отсюда

$$\text{sh}x=\frac{1}{2}\sum_{m=0}^{n}2\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+r(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+r(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+r(x).$$

Аналогично

$$\mathrm{ch}x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\sum_{m=0}^{n}\frac{x^{2m}}{(2m)!}+r(x)=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+r(x).$$

2) Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Решение.

Это есть неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применение к ней правила Лопиталя, как можно понять, потребует взятия четырех производных числителя и знаменателя. Мы найдем этот предел по - другому, используя разложения функций по формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано:

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$; $e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+o(x^2)$. Заменим в обеих частях последней формулы x на $-\dfrac{x^2}{2}$:

$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2}{2}+o(x^4)$. Подставляя в исходный предел и учитывая, что разность двух бесконечно малых вида $o(x^4)$ есть такая же бесконечно малая, получаем, что наш предел равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{(\frac{1}{24}-\frac{1}{8})x^4}{x^4}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^4)}{x^4}=(\frac{1}{24}-\frac{1}{8})+0=-\frac{1-3}{24}=-\frac{1}{12}.$$

6. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

6.1. Возрастание и убывание функций

Определение 6.1. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на $[a, b]$, если для любых точек $x_1, x_2 \in [a,b]$ таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется убывающей на $[a, b]$, если для любых точек $x_1, x_2 \in [a,b]$, таких, что $x_2 > x_1$, выполняется условие $f(x_2) < f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется монотонной на $[a, b]$, если она является возрастающей или убывающей на $[a, b]$.

(При выполнении нестрогих неравенств $f(x_2) \ge f(x_1)$ и $f(x_2) \le f(x_1)$ соответствующие функции называются неубывающими, невозрастающими и монотонными.)

Теорема 6.1. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную во всем внутренних точках этого отрезка. Для того, чтобы $f(x) = \mathrm{const}, x \in [a,b]$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)=0, x\in(a,b)$.

▲ *Необходимость.* $f(x)=C \Rightarrow f'(x)=0$ (как производная постоянной).

Достаточность. Пусть $f'(x)=0, x\in(a,b) \Rightarrow$ для $x\in[a,b]$ по теореме Лагранжа (она применима) $\exists\, c\in(a,x)$:

$$f(x)-f(a)=\underbrace{f'(c)}_{\text{=0 по условию}}(x-a)=0 \Rightarrow f(x)=f(a) \text{ для всех } x\in[a,b] \Leftrightarrow f(x)=C. \ \blacksquare$$

Теорема 6.2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет конечную производную во всех внутренних точках этого отрезка.
Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была возрастающей на $[a, b]$ необходимо, чтобы $f'(x) \geq 0$ для $x \in (a,b)$ и достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ для $x \in (a,b)$.
Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была убывающей на $[a, b]$ необходимо, чтобы $f'(x) \leq 0$ для $x \in (a,b)$ и достаточно, чтобы $f'(x) < 0$ для $x \in (a,b)$.

▲ *Необходимость.* Пусть $y = f(x)$ на $[a, b]$, для определенности, возрастает. Докажем, что тогда $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$, $x \in (a,b)$.

$\Delta x > 0 \Rightarrow f(x+\Delta x) > f(x) \Rightarrow \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$ (числитель и знаменатель > 0);

$\Delta x < 0 \Rightarrow f(x+\Delta x) < f(x) \Rightarrow \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$ (числитель и знаменатель < 0).

Значит, $\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$. Так как предел этой дроби при $\Delta x \to 0$ существует, то $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$ (см. замечание в параграфе 2.1).

Заметим, что из того, что функция больше нуля, вовсе не следует, что ее предел, если он существует, тоже больше нуля; он может быть и равен нулю.

Пример: $y = x^3$ – возрастает на [-1,1]; но $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$ (рис. 25).

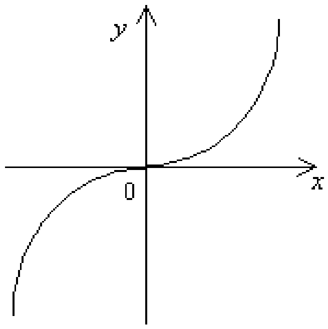

Рис. 25

Достаточность. Пусть, для определенности, $f'(x) > 0, x \in (a,b)$. Пусть $x_1, x_2 \in [a,b]$ $x_1, x_2 \in [a,b]$ и $x_2 > x_1$. Согласно теореме Лагранжа (она применима), существует $c \in (x_1, x_2)$ такое, что

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{\text{>0 по условию}}(x_2 - x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow y = f(x) \text{ возрастает на } [a, b]. \blacksquare$$

6.2. Экстремумы функции

Определение 6.2. Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0. x_0 называется *точкой максимума* функции $y = f(x)$, если $f(x) < f(x_0)$ для всех точек x, достаточно близких к x_0, т.е. для $x: 0 < |x - x_0| < \delta$, где δ достаточно мало. x_0 называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, если $f(x) > f(x_0)$ для всех точек x, достаточно близких к x_0, т.е. для $x: 0 <| x - x_0 |< \delta$, где δ достаточно мало. Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума* этой функции (рис. 26).

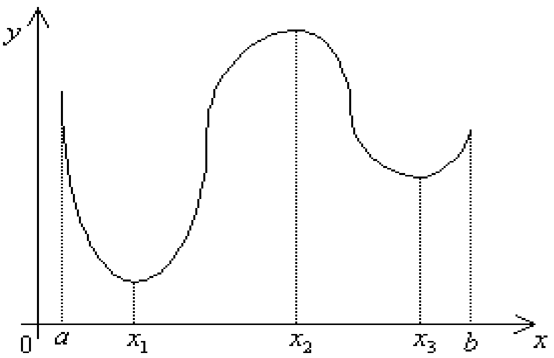

Рис. 26

При таком графике функция $y = f(x)$ будет иметь на отрезке $[a,b]$ одну точку максимума и две точки минимума.

Теорема 6.3 (необходимое условие экстремума). Пусть x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$. Тогда $f'(x_0) = 0$ или не существует (в частности, равна ∞).

▲ Пусть для определенности x_0 – точка максимума функции $\Rightarrow f(x) < f(x_0)$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0; возьмем любой отрезок, принадлежащий этой окрестности, у которого x_0 является внутренней точкой, тогда на этом отрезке функция принимает наибольшее значение во внутренней точке x_0, значит по теореме Ферма 5.1 , если существует конечная производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$. ■

Замечание 1. Производная в точке экстремума может, действительно, не существовать (см. график функции $y =| x |$ на рис.21) и, как частный случай этого, может равняться ∞ (см. график функции на рис. 22, в котором касательная в точке 0 вертикальна, т.е. $f'(0) = \infty$).

Определение 6.3. Точки, в которых производная функции равна 0 или не существует, называются *критическими* точками этой функции.

Замечание 2. Пример функции $y = x^3$ (рис. 25) показывает, что обратная к 6.3 теорема неверна: производная этой функции в точке 0 равна 0, а экстремума у функции в этой точке нет.

Теорема 6.4 (достаточное условие экстремума). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в окрестности точки x_0 и пусть в этой окрестности, кроме, может быть, самой точки x_0, существует конечная производная $f'(x)$. Тогда: 1) если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f'(x)$

меняет знак «+» на «−», то x_0 − точка максимума функции $y = f(x)$;

2) если при переходе через точку x_0 слева направо производная $f'(x)$ меняет знак с «−» на «+», то x_0 − точка минимума функции $y = f(x)$;

3) если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ знака не меняет, то экстремума у функции в точке x_0 нет.

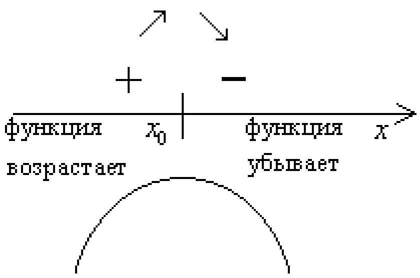

Рис. 27

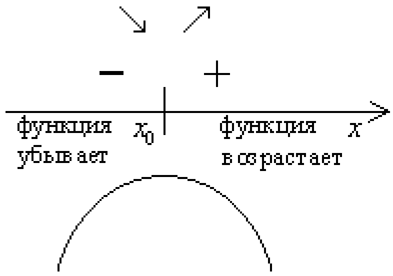

Рис. 28

На рис. 27 и 28 изображены знаки производной $f'(x)$ и (стрелочками) интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$.

▲ 1) Для x, достаточно близких к x_0, по теореме Лагранжа имеем:

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0), \tag{6.1}$$

где c лежит между x_0 и x. Отсюда:

$x < x_0 \Rightarrow c < x_0 \Rightarrow f'(c) > 0; x - x_0 < 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0);$

$x > x_0 \Rightarrow c > x_0 \Rightarrow f'(c) < 0; x - x_0 > 0 \Rightarrow f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0).$

Т.е. $f(x) < f(x_0)$ для всех x из некоторой окрестности точки $x_0 : x \neq x_0 \Rightarrow x_0$ − точка максимума функции $y = f(x)$;

2) аналогично пункту 1);

3) если, например, $f'(x) > 0$ для всех x из некоторой окрестности точки $x_0 : x \neq x_0$, то в формуле (6.1) $f'(c) > 0$, значит, при $x < x_0$ $f(x) - f(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$, а при $x > x_0$ $f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$, т.е. экстремума у функции в точке x_0 нет. ■

Замечание. Условие непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 (без которого, кстати, нельзя применять теорему Лагранжа) существенно для справедливости теоремы, что показывает нижеприведенный пример (рис. 29)

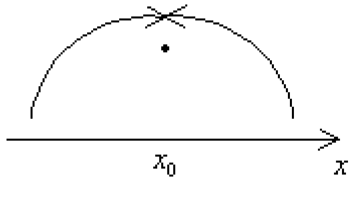

Рис. 29

В этом примере производная меняет знак при переходе через x_0 слева направо с « + » на «− », но в окрестности точки x_0 $f(x) > f(x_0)$, т.е. x_0 − точка минимума функции.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}$.

Решение.

$y' = 2 + 3 \cdot \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = 2(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}) = 2\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}}$. Согласно необходимому условию экстремума, он может быть только в критических точках функции, т.е. точках, где производная равна 0 ($\sqrt[3]{x}+1=0 \Rightarrow x=-1$) или не существует ($x=0$; точнее, в этой точке $y' = \infty$, следовательно, касательная вертикальна).

Теперь проверим, выполняется ли достаточное условие экстремума. Знаки y':

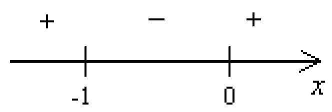

Рис. 30

Значит, $x = -1$ − точка максимума, а $x = 0$ – точка минимума функции. $f(-1) = -2 + 3 = 1$, $f(0) = 0$.

Найдем точки пересечения графика функции с осью $0x$ и построим (не исследуя пока поведение функции при $x \to \infty$), ее график (рис. 31): $2x + 3\sqrt[3]{x^2} = 0; \sqrt[3]{x^2}(2\sqrt[3]{x} + 3) = 0; x_1 = 0; \sqrt[3]{x_2} = -\frac{3}{2}, x_2 = -\frac{27}{8}$;

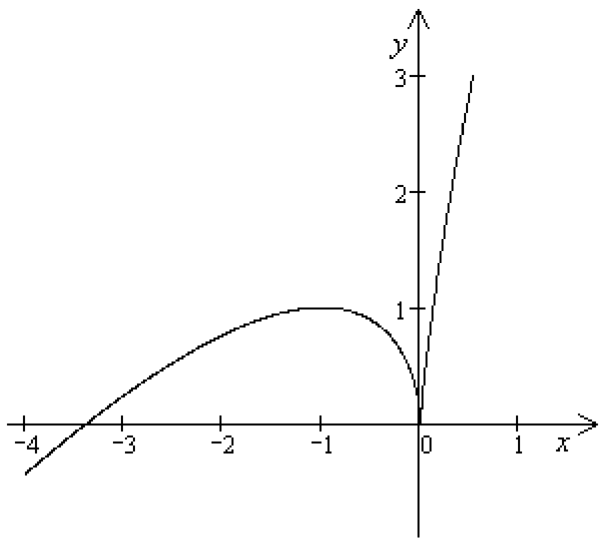

Рис. 31

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков

Теорема 6.5. Пусть в некоторой точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет все производные до порядка $n \ge 2$ включительно и

$$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) = 0, \dots,\ f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \ne 0.$$

Тогда:

1) если n четно и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то x_0 − точка минимума функции $y = f(x)$;
2) если n четно и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то x_0 − точка максимума функции $y = f(x)$;
3) если n нечетно, то экстремума у функции в точке x_0 нет.

▲ В нашей окрестности точки x_0 разложим функцию по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (5.23), которую, выделив первый член, можно записать в виде

$$f(x)=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)\text{, откуда}$$

$$f(x)-f(x_0)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n).$$

В этой формуле по условию теоремы лишь последнее слагаемое под знаком суммы отлично от 0, и формула приобретает вид:

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n). \qquad (6.2)$$

Для доказательства теоремы надо определить знак левой, а значит, правой части этой формулы. Так как число $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\neq 0$, то второй член правой части есть $o(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n)$ и при x, близких к x_0, не превосходит, например, половины первого члена. Отсюда следует, что знак правой части совпадает со знаком первого ее члена $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. Теперь рассмотрим все три случая в условии теоремы:

1) n четно $\Rightarrow (x-x_0)^n>0$ для всех x; $f^{(n)}(x_0)>0 \Rightarrow \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)>0 \Rightarrow$

$f(x)-f(x_0)>0 \Rightarrow f(x)>f(x_0) \Rightarrow$ x_0 − точка минимума функции $y=f(x)$;

2) аналогично получим $f(x)<f(x_0) \Rightarrow$ x_0 – точка максимума функции $y=f(x)$;

3) знак $(x-x_0)^n$, а, значит, и знак $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ будет меняться при переходе x через точку x_0, значит, с одной стороны точки x_0 $f(x)>f(x_0)$, а с другой стороны точки x_0 $f(x)<f(x_0)$, значит, экстремума у функции $f(x)$ в точке x_0 нет. ■

Следствие. При $n = 2$ теорема принимает вид:

Пусть в некоторой точке x_0 функция $y=f(x)$ имеет первую $f'(x_0)$ и вторую $f''(x_0)$ производные и $f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$. Тогда, если $f''(x_0)>0$, то x_0 − точка минимума функции, а если $f''(x_0)<0$, то x_0 − точка максимума функции.

Примеры. Исследовать функции на экстремум.

1) $f(x)=\sin x+\cos x \Rightarrow f'(x)=\cos x-\sin x=0; \sin x=\cos x; \mathrm{tg}x=1; x=\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

Эту серию можно разбить на две: $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$ и $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$; $f''(x)=-\sin x-\cos x$;

$$f''\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}<0 \quad \overset{\text{следствие}}{\Rightarrow} \quad \text{это точки максимума функции;}$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}>0 \quad \overset{\text{следствие}}{\Rightarrow} \quad \text{это точки минимума функции.}$$

2) $f(x)=\text{ch}x+\cos x \;\Rightarrow\; f'(x)=\text{sh}x-\sin x=0$; все решения этого уравнения найти невозможно, но, очевидно, что одним из решений будет $x = 0$. Исследуем функцию на экстремум в этой точке:

$f''(x)=\text{ch}x-\cos x; f''(0)=1-1=0$, т.е. следствие уже не применимо. Попробуем применить саму теорему:

$f'''(x)=\text{sh}x+\sin x, f'''(0)=0; f^{iv}(x)=\text{ch}x+\cos x, f^{iv}(0)=1+1=2>0$

Значит ($n = 4$ – четно) и $f^{iv}(0)>0 \Rightarrow x = 0$ – точка минимума функции.

6.3. Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

Как указано в теореме 3.7, любая непрерывная на отрезке функция $y = f(x)$ принимает в некоторых точках этого отрезка свои наибольшее и наименьшее значения. Пусть x_0 – одна из этих точек. Возможны два варианта: а) x_0 – край отрезка; б) x_0 – внутренняя точка отрезка, в этом случае по теореме Ферма 5.1 $f'(x_0)=0$ или не существует, т.е. x_0 – критическая точка.

Таким образом, для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке, нужно найти все критические точки функции, принадлежащие этому отрезку, вычислить значения функции в этих точках и на краях отрезка и взять наибольшее и наименьшее из этих значений.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ на отрезке $x\in[-2,0]$.

Решение.

$f'(x)=6x^2-6x-12=0; x^2-x-2=0; x_1=-1, x_2=2\notin[-2,0];$

$f(-1)=-2-3+12+1=8; f(-2)=-16-12+24+1=-3; f(0)=1.$

Значит, наибольшее значение функции на $[-2,0]$ равно 8, а наименьшее равно -3.

Заметим, что при таком решении даже не надо проверять достаточные условия экстремума функции.

Отметим, что если точка экстремума функции на отрезке единственна, то в точке максимума функция принимает наибольшее, а в точке минимума – наименьшее значение. В таких случаях проверка достаточных условий экстремума может оказаться полезной (заменяя вычисление значений функции на краях отрезка – см. рис. 32).

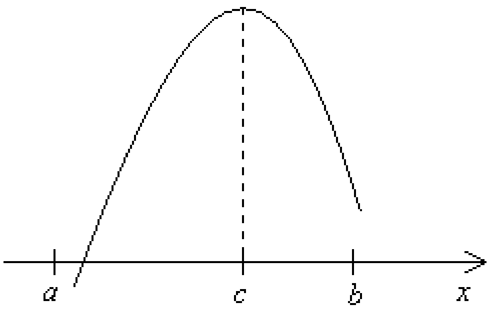

Рис. 32

6.4. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Определение 6.4. Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема (т.е. имеет конечную производную) в некоторой окрестности точки x_0. Рассмотрим кривую $y = f(x)$, т.е. график этой функции.

Кривая $y = f(x)$ называется *выпуклой* (или обращена выпуклостью вверх) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, если для x, близких к x_0, все точки кривой лежат под касательной к кривой, проведенной в точке M_0, или ординаты точек кривой меньше ординат точек касательной с той же абсциссой (рис. 33).

Кривая $y = f(x)$ называется *вогнутой* (или обращена выпуклостью вниз) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, если для x, близких к x_0, все точки кривой лежат над касательной к кривой, проведенной в точке M_0, или ординаты точек кривой больше ординат точек касательной с той же абсциссой (рис. 34).

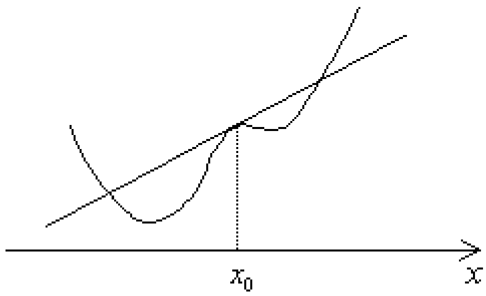

Рис. 33

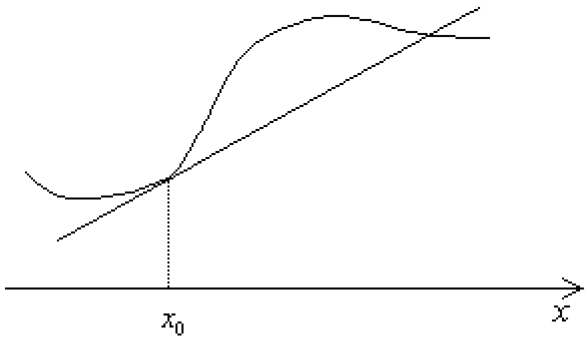

Рис. 34

Теорема 6.6. Пусть в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет конечную вторую производную $f''(x_0) \neq 0$. Тогда:

1) если $f''(x_0) > 0$, то кривая $y = f(x)$ вогнута в точке $M_0(x_0, f(x_0))$;

2) если $f''(x_0) < 0$, то кривая $y = f(x)$ выпукла в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

▲ $f''(x_0)$ существует и конечна, следовательно, $f(x)$ и $f'(x)$ существуют в окрестности точки x_0. Уравнение касательной к кривой в этой точке имеет вид:

$$y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \qquad (6.3)$$

В окрестности точки x_0 разложим функцию по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, записав три первых члена и остаточный член:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2). \qquad (6.4)$$

Вычтем из равенства (6.4) равенство (6.3):

$$f(x) - y_{кас} = \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2). \qquad (6.5)$$

Для доказательства теоремы нам надо определить знак левой, а, значит, правой части этого равенства. Будем рассуждать, как и при доказательстве теоремы 6.5: при $f''(x_0) \neq 0$ второй член правой части есть $o(\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2)$ и при *x*, близких к x_0, не превосходит, например, половины первого члена. Тогда знак правой части совпадает со знаком первого ее члена $\frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$. В этом члене $(x - x_0)^2 > 0$ при $x \neq x_0$, значит, знак левой части $f(x) - y_{кас}$ совпадает со знаком $f''(x_0)$.

1) $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) - y_{кас} > 0 \Rightarrow f(x) > y_{кас}$, следовательно, в окрестности x_0 кривая лежит над касательной, значит, кривая вогнута в точке M_0;
2) $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x) - y_{кас} < 0 \Rightarrow f(x) < y_{кас}$, следовательно, в окрестности x_0 кривая лежит под касательной, значит, кривая выпукла в точке M_0.

Определение 6.5. Кривая называется *выпуклой* (*вогнутой*) на некотором интервале, если она *выпукла* (*вогнута*) в каждой точке этого интервала.

Определение 6.6. Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Точка $M_0(x_0, f(x_0))$ называется *точкой перегиба* кривой $y = f(x)$, если в любой окрестности x_0 есть и точки кривой, лежащие над касательной к кривой, и точки кривой, лежащие под касательной к кривой, проведенной в точке M_0 (рис. 35).

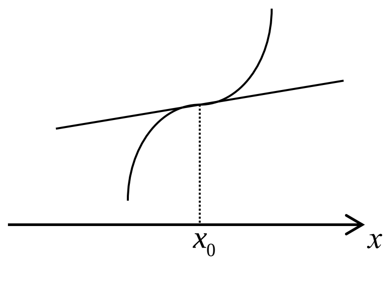

Рис. 35

В точке перегиба кривая пересекает касательную. Точка перегиба является границей между интервалами выпуклости и вогнутости графика функции.

Теорема 6.7 (необходимое условие перегиба). Пусть $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$. Тогда $f''(x_0) = 0$ или не существует (в частности равна ∞).

▲Пусть существует конечная $f''(x_0) \neq 0$. Тогда по теореме 6.6 кривая $y = f(x)$ выпукла (при $f''(x_0) < 0$) или вогнута (при $f''(x_0) > 0$), что противоречит условию теоремы. ■

Замечание. Пример всюду вогнутой кривой $y = f(x) = x^4$ (рис. 36), у которой $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$, показывает, что обратная к 6.7 теорема неверна.

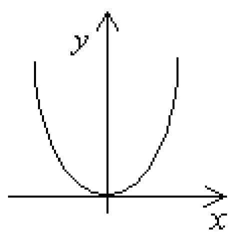

Рис. 36

Теорема 6.8. (достаточные условия перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ определена и дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0. Пусть в этой окрестности, кроме, может быть, самой точки x_0, функция имеет вторую производную $f''(x)$. Если при переходе через точку x_0 эта вторая производная меняет знак, то $M_0(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$. Если при переходе через точку x_0 вторая производная знака не меняет, то перегиба у функции в точке M_0 нет.

▲ Используя уравнение касательной (4.2), имеем:

$$f(x) - y_{кас} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Применим к разности $f(x) - f(x_0)$ теорему Лагранжа (5.4):

$$f(x) - y_{кас} = f'(\xi)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0),$$

где точка ξ лежит между x_0 и x.

Вынесем $x - x_0$ за скобки:

$$f(x) - y_{кас} = (f'(\xi) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Применим теорему Лагранжа еще раз, теперь к разности $f'(\xi) - f'(x_0)$:

$$f(x) - y_{кас} = f''(\eta)(\xi - x_0)(x - x_0), \tag{6.6}$$

где η – между x_0 и ξ.

В (6.6) если $x > x_0$, то $\xi > x_0$ и $\eta > x_0$, а если $x < x_0$, то $\xi < x_0$ и $\eta < x_0$ $\Rightarrow (\xi - x_0)(x - x_0) > 0$ при $x \neq x_0$, и знак левой части формулы (6.6) совпадает со знаком $f''(\eta)$.

Пусть при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, тогда при таком переходе меняет знак и $f''(\eta)$, а, значит, и левая часть формулы (6.6). Таким образом, с одной стороны точки x_0 кривая лежит над касательной, а с другой стороны точки x_0 кривая лежит под касательной. Значит, $M_0(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба нашей кривой.

Если же при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ знака не меняет, то аналогичное рассуждение приводит к тому, что с обеих сторон точки x_0 кривая лежит либо над, либо под касательной, т.е. перегиба в точке M_0 не имеет. ■

Пример. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перигиба кривой $y = x + \sqrt[3]{(x-1)^5}$.
Решение.

$y'=1+\frac{5}{3}\sqrt[3]{(x-1)^2}; y''=\frac{5\cdot 2}{3\cdot 3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{10}{9}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$; $y''\neq 0$ и не существует в точке $x = 1$; в этой точке $y = 1$, а угловой коэффициент касательной $y' = 1$; знаки y'' (рис. 37):

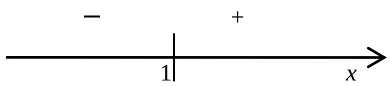

Рис. 37

Значит, на интервале $(-\infty,1)$ кривая выпукла, на интервале $(1,+\infty)$ кривая вогнута, а точка с координатами $(1,1)$ является точкой перегиба кривой.

График функции в окрестности точки $x_0 = 1$ выглядит следующим образом (рис. 38):

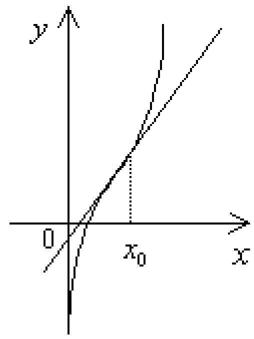

Рис. 38

Замечание. Теорема 6.8 справедлива и если $f'(x_0) = \infty$, т.е. касательная в этой точке вертикальна:

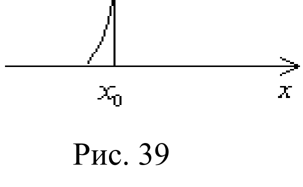

Рис. 39

6.5. Асимптоты графика функции

Пусть $y = f(x)$ – некоторая кривая и M – точка на этой кривой. Мы будем говорить, что точка M движется вдоль кривой в бесконечность, если расстояние от M до начала координат стремится к ∞ при движении M вдоль кривой.

Определение 6.7. Если расстояние d от точки M кривой до некоторой прямой стремится к 0 при движении точки M вдоль кривой в бесконечность, то такая прямая называется *асимптотой* данной кривой.

Асимптоты делят на вертикальные и наклонные (в частности, горизонтальные).

1. Примеры *вертикальных* асимптот с уравнениями $x = a$:

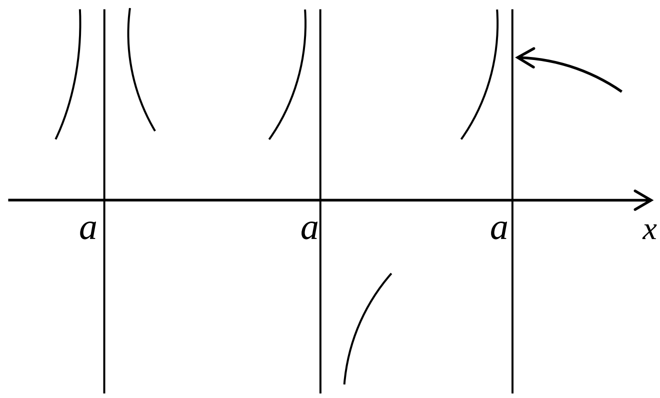

Рис. 40

Из рис. 40 очевидна следующая теорема.

Теорема 6.9. Прямая $x = a$ будет асимптотой графика функции $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to a-o} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to a+o} f(x) = \infty$, или то и другое сразу.

2. *Наклонные* и *горизонтальные* асимптоты задаются уравнениями $y = kx + b$ и могут быть различными при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ ($k = 0$ – асимптота горизонтальна).

Теорема 6.10. Для того, чтобы прямая $Y = kx + b$ являлась асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ необходимо и достаточно, чтобы k и b удовлетворяли условиям:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}. \tag{6.7}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx). \tag{6.8}$$

Аналогично при $x \to -\infty$.

▲

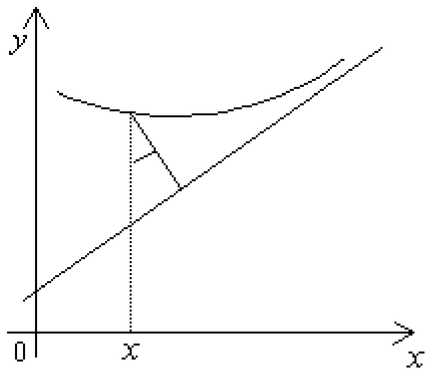

Рис. 41

Обозначим ординату точки кривой M с абсциссой x как $y = f(x)$, ординату точки прямой с той же абсциссой как $Y = kx + b$, расстояние от точки M до прямой как $d = d(x)$. Тогда

$$d = |y - Y|\cos\varphi, \tag{6.9}$$

где $\varphi-$ угол между осью y и перпендикуляром к прямой (рис. 41). Существование асимптоты равносильно справедливости условия

$$\lim_{x\to+\infty} d(x) = 0\,. \tag{6.10}$$

В формуле (6.9) $\cos\varphi$ – постоянное, не зависящее от x число; так как наша прямая не вертикальна, то $\varphi \neq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\,\varphi \neq 0$. Значит, условие (6.10) равносильно условию $\lim\limits_{x\to+\infty} |y - Y| = 0$, или условию

$$\lim_{x\to+\infty}(y - Y) = 0\,. \tag{6.11}$$

Необходимость. Пусть прямая $Y = kx + b-$ асимптота графика функции $y = f(x)$, значит выполняется условие (6.11), или, что то же самое,

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = 0\,. \tag{6.12}$$

Отсюда

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) - \lim\limits_{x\to+\infty} b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) - b = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b \;\Rightarrow$ (6.8) верно.

Из (6.12) также следует, что

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x) - kx - b}{x}\overset{\frac{0}{\infty}}{=}0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty} k - \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{x} = 0 \Rightarrow$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - k - 0 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = k \Rightarrow$ верно (6.7).

Достаточность. Пусть для некоторой прямой $Y = kx + b$ ее k и b удовлетворяют условиям (6.7) и (6.8) $\Rightarrow$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx - b) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) - \lim\limits_{x\to+\infty} b = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) - b = 0 \Rightarrow$ верно (6.12), т.е. прямая $Y = kx + b$, действительно является асимптотой графика $y = f(x)$. ■

Процедура нахождения наклонных и горизонтальных такова: по формуле (6.7) находим k, подставляем это k в формулу (6.8) и находим b. Если хоть один из пределов (6.7) и (6.8) бесконечен или не существует, то асимптоты нет.

6.6. Примерная схема общего исследования функции и построения ее графика

1. Найти область определения функции и выяснить поведение функции на ее границе.
2. Выяснить, не является ли функция четной: $f(-x) = f(x)$ или нечетной: $f(-x) = -f(x)$. Для таких функций достаточно построить график для $x \geq 0$, а затем отразить: для четных функций относительно оси $0y$, а для нечетных функций – относительно начала координат.
3. Выяснить, не является ли функция периодической: $f(x+T) = f(x)$. Для такой функции с периодом T достаточно построить график на любом интервале длиной в период, а затем продолжить периодически.
4. Найти точки пересечения графика с осями координат, взяв $x = 0$ или $y = 0$.
5. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов.
6. Найти асимптоты графика функции.
7. Установить интервалы возрастания и убывания функции. Найти точки экстремума, выяснить значения функции в этих точках.
8. Установить интервалы выпуклости и вогнутости графика функции. Найти точки перегиба графика, выяснить значения функции и ее первой производной в этих точках.
9. Построить график функции.

При необходимости уточнить отдельные участки кривой, можно вычислить координаты нескольких ее дополнительных точек.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2}$ и построить ее график.

Решение.

1. Область определения функции: $x \neq -2$; $\lim\limits_{x\to -2+0} \dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2} = \lim\limits_{x\to -2-0} \dfrac{(x+3)^3}{(x+2)^2} = +\infty$.

2. Функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Функция не является периодической.

4. $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{27}{4}$; $y = 0 \Rightarrow x = -3$.

5. $x=-2$ точка разрыва; из пункта 1) следует, что разрыв – второго рода.

6. Из этого же пункта следует, что прямая $x=-2$ является вертикальной асимптотой графика функции. Найдем наклонные асимптоты, учитывая, что пределы при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$ здесь ничем не отличаются:

$$k \overset{(6.7)}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(x+3)^3}{(x+2)^2 x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^3}{\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^2} = 1$$ (числитель и знаменатель разделили на x^3);

$$b \overset{(6.8)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+3)^3}{(x+2)^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+9x^2+27x+27-x^3-4x^2-4x}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+23x+27}{x^2+4x+4}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{23}{x}+\frac{27}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}=5 \;\Rightarrow\; y=x+5$$ — асимптота при $x\to\pm\infty$.

7. $$y'=\frac{3(x+3)^2(x+2)^2-(x+3)^3 2(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{(x+3)^2(x+2)(3(x+2)-2(x+3))}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{(x+3)^2(3x+6-2x-6)}{(x+2)^3}=\frac{(x+3)^2 x}{(x+2)^3}$$; критические точки функции $x = 0$, $x = -3$ (в этих двух точках производная равна 0) и $x = -2$ (это точка разрыва функции); знаки y' (рис. 42):

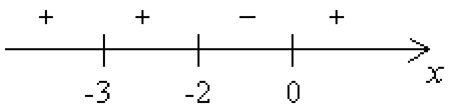

Рис. 42

Значит, на интервалах $(-\infty,-3),(-3,-2)$ и $(0,+\infty)$ функция возрастает, а на интервале $(-2,0)$ она убывает; точка $x = 0$ является точкой минимума функции, $f(0)=\frac{27}{4}$; в точке разрыва $x = -2$ будет «бесконечный максимум», а в точке $x = -3$ экстремума нет, хотя и $f'(-3)=0$ (т.е. касательная в этой точке горизонтальна).

8. $$y''=\frac{(2(x+3)x+(x+3)^2)(x+2)^3-(x+3)^2 x3(x+2)^2}{(x+2)^6}=$$

$$=\frac{(x+2)^2(x+3)((2x+x+3)(x+2)-(x+3)x3)}{(x+2)^6}=\frac{(x+3)(3(x+1)(x+2)-3x(x+3))}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{3(x+3)(x^2+3x+2-x^2-3x)}{(x+2)^4}=\frac{6(x+3)}{(x+2)^4}$$; знаки y'' (рис 43):

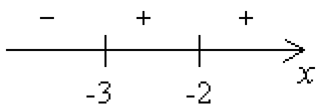

Рис. 43

Таким образом, наша кривая выпукла на интервале $(-\infty,-3)$ и вогнута на интервалах $(-3,-2),(-2,+\infty)$; $x = -3$ является абсциссой точки перегиба; в этой точке $y=0$ и $y'=0$.

9. Теперь построим график функции (рис. 44):

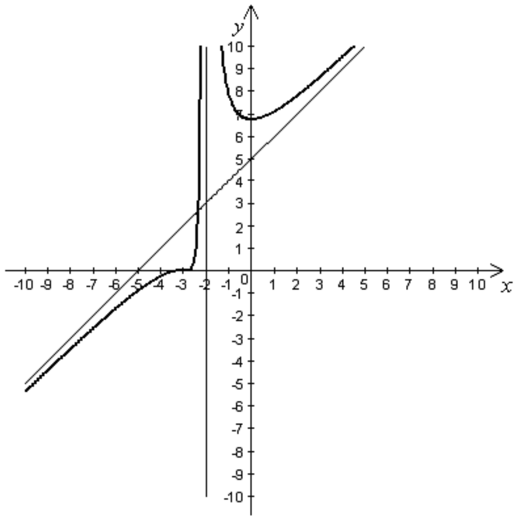

Рис. 44

Ответ на вопрос, сверху или снизу график приближается к асимптоте, дается наличием или отсутствием у графика соответствующих точек перегиба. Если бы при $x \to +\infty$ график подходил к асимптоте снизу или при $x \to -\infty$ график подходил к асимптоте сверху, то, в дополнение к точке -3, кривая имела бы другие точки перегиба, что не было подтверждено нашими вычислениями.

7. ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ СКАЛЯРНОГО АРГУМЕНТА

7.1. Определение векторной функции скалярного аргумента

Уравнения линии в пространстве

Пусть A (x, y, z) – некоторая точка в пространстве. Вектор $\overline{r} = \overline{OA} = \{x, y, z\} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$ называется радиус – вектором точки A.

Пусть координаты точки A (или, что то же самое, координаты вектора $\overline{r}$) являются функциями некоторого параметра t:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \tag{7.1}$$

Тогда $\overline{r} = x(t)\overline{i} + y(t)\overline{j} + z(t)\overline{k}$, или коротко

$$\overline{r} = \overline{r}(t) \tag{7.2}$$

Т.е. вектор $\overline{r}$ зависит от t. При изменении t изменяются x, y, z, и точка A – конец вектора $\overline{r}$ – опишет в пространстве некоторую линию.

Определение 7.1. Уравнения (7.1) называются *параметрическими уравнениями* линии в пространстве (задаются координаты точек линии как функции параметра t), уравнение (7.2) называется *векторным уравнением* линии в пространстве (задаётся радиус – вектор $\overline{r} = \overline{r}(t)$).

Если $t \in [a, b]$, то этим задаётся начало и конец линии.

Уравнения (7.1) являются аналогом параметрических уравнений кривой на плоскости, разобранных в параграфе 4.5.

Примеры векторных функций скалярного аргумента.

1) $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ – канонические уравнения прямой линии в пространстве. Напишем параметрические уравнения этой прямой:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t\Rightarrow\begin{cases}x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\\ z=z_0+nt\end{cases}.$$

2) $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=at\end{cases}$ – так называемая винтовая линия.

$\Rightarrow x^2+y^2=a^2$, т.е. x и y как бы “пробегают” окружность, а с увеличением t z всё время растёт. При $t=0$ имеем: $x=a, y=0, z=0$ (рис. 45).

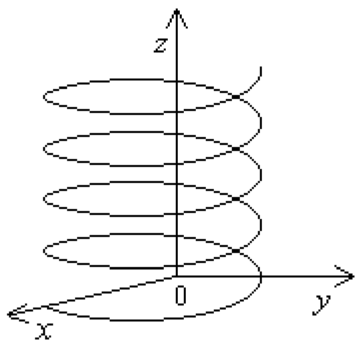

Рис. 45

Задание линии в пространстве параметрическими уравнениями наиболее удобный, но не единственный способ её задания: кривая может быть задана как линия пересечения двух поверхностей. Например, прямую линию можно задать как линию пересечения двух плоскостей.

Векторная функция скалярного аргумента

Вернёмся к формуле (7.2) $\overline{r}=x(t)\overline{i}+y(t)\overline{j}+z(t)\overline{k}$, или $\overline{r}=\overline{r}(t)$. При изменении t изменяются координаты x, y, z вектора $\overline{r}$, т.е. изменяется сам вектор $\overline{r}$.

Определение 7.2. Пусть каждому значению t из некоторого множества чисел T соответствует определённый вектор трёхмерного пространства $\overline{r}=\overline{r}(t)$. Тогда говорят, что задана векторная функция (вектор – функция) скалярного аргумента с областью определения T.

Понятие векторной функции скалярного аргумента является частным случаем общего понятия функции, введённого в параграфе 1.4.

Таким образом, формула (7.2) задаёт векторную функцию скалярного аргумента. Задание такой функции равносильно заданию трёх скалярных функций $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$.

Пример. Параметрические уравнения прямой линии
$x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$, можно переписать так:
$\overline{r} = (x_0 + lt)\overline{i} + (y_0 + mt)\overline{j} + (z_0 + nt)\overline{k} = (x_0\overline{i} + y_0\overline{j} + z_0\overline{k}) + (l\overline{i} + m\overline{j} + n\overline{k})t \Rightarrow$
$\overline{r} = \overline{r}(t) = \overline{r}_0 + \overline{s}t,$ где $\overline{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$ – постоянный вектор, а $\overline{s} = \{l, m, n\}$ – направляющий вектор прямой линии.

7.2. Предел векторной функции скалярного аргумента

По аналогии с пределом скалярной функции дается следующее

Определение 7.3. Пусть дана вектор – функция скалярного аргумента $\overline{r} = \overline{r}(t),$ т.е. $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, t \in T$. Пусть $\overline{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ – некоторый фиксированный вектор. $\lim\limits_{t\to a} \overline{r}(t) = \overline{b},$ если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall t, 0 < |t-a| < \delta\ \ (|\overline{r}(t) - \overline{b}| < \varepsilon).$

Здесь $|\overline{r}(t) - \overline{b}|$ – модуль разности двух векторов. Т.е. последнее неравенство можно записать в виде

$$\sqrt{[x(t)-b_x]^2 + [y(t)-b_y]^2 + [z(t)-b_z]^2} < \varepsilon. \tag{7.3}$$

Теорема 7.1. Для того чтобы $\lim\limits_{t\to a} \overline{r}(t) = \overline{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{t\to a} x(t) = b_x, \lim\limits_{t\to a} y(t) = b_y, \lim\limits_{t\to a} z(t) = b_z$.

▲ *Необходимость.* Пусть $\lim\limits_{t\to a} \overline{r}(t) = \overline{b} \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall t, 0 < |t-a| < \delta$
$(\sqrt{[x(t)-b_x]^2 + [y(t)-b_y]^2 + [z(t)-b_z]^2} < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{[x(t)-b_x]^2} < \varepsilon \Rightarrow | x(t) - b_x | < \varepsilon)$
$\Rightarrow \lim\limits_{t\to a} x(t) = b_x$. Аналогично для двух других координат.

Достаточность. Для $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ 0 < |t-a| < \delta$
$(|x(t)-b_x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},\ |y(t)-b_y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}},\ |z(t)-b_z| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}})$
(точнее, для каждой из переменных x, y и z будут свои $\delta_x, \delta_y, \delta_z$, и в качестве δ берется наименьшее из этих чисел)

$$\Rightarrow \sqrt{[x(t)-b_x]^2 + [y(t)-b_y]^2 + [z(t)-b_z]^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3} + \frac{\varepsilon^2}{3}} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.\ ■$$

Используя эту теорему и аналогичные свойства пределов скалярных функций $x(t), y(t), z(t)$, доказываются свойства пределов векторных функций:

1) $\lim\limits_{t\to a}\left[\overline{r_1}(t)\pm\overline{r_2}(t)\right]=\lim\limits_{t\to a}\overline{r_1}(t)\pm\lim\limits_{t\to a}\overline{r_2}(t)$, если пределы в правой части существуют;

2) $\lim\limits_{t\to a}\left[c\overline{r}(t)\right]=c\lim\limits_{t\to a}\overline{r}(t),$ если предел в правой части существует.

▲ Пусть, например, $\overline{r_1}(t)=\{x_1(t),y_1(t),z_1(t)\}$, $\lim\limits_{t\to a}\overline{r_1}(t)=\overline{b_1}=\{b_x^1,b_y^1,b_z^1\}$, $\overline{r_2}(t)=\{x_2(t),y_2(t),z_2(t)\}$, $\lim\limits_{t\to a}\overline{r_2}(t)=\overline{b_2}=\{b_x^2,b_y^2,b_z^2\}$, тогда из необходимости условий теоремы 7.1 следует, что $\lim\limits_{t\to a}x_1(t)=b_x^1$, $\lim\limits_{t\to a}y_1(t)=b_y^1$, $\lim\limits_{t\to a}z_1(t)=b_z^1$, $\lim\limits_{t\to a}x_2(t)=b_x^2$, $\lim\limits_{t\to a}y_2(t)=b_y^2$, $\lim\limits_{t\to a}z_2(t)=b_z^2$.

Так как $\overline{r_1}(t)+\overline{r_2}(t)=\{x_1(t)+x_2(t),y_1(t)+y_2(t),z_1(t)+z_2(t)\}$ и
$\lim\limits_{t\to a}[x_1(t)+x_2(t)]=\lim\limits_{t\to a}x_1(t)+\lim\limits_{t\to a}x_2(t)=b_x^1+b_x^2$ (аналогично для y и z),
то из достаточности условий теоремы 7.1 следует, что существует
$\lim\limits_{t\to a}[\overline{r_1}(t)+\overline{r_2}(t)]=\{b_x^1+b_x^2,\ b_y^1+b_y^2,\ b_z^1+b_z^2\}=\overline{b_1}+\overline{b_2}$.

Аналогично проверяется второе свойство. ■

7.3. Непрерывность векторной функции скалярного аргумента

По аналогии с непрерывностью скалярной функции дается следующее определение.

Определение 7.4. Пусть дана векторная функция скалярного аргумента $\overline{r}=\overline{r}(t)$, или $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$. Эта функция $\overline{r}=\overline{r}(t)$ называется непрерывной в точке $t=t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{r}(t)=\overline{r}(t_0)$.

В силу теоремы 7.1, это определение равносильно тому, что $\lim\limits_{t\to t_0}x(t)=x(t_0)$, $\lim\limits_{t\to t_0}y(t)=y(t_0)$, $\lim\limits_{t\to t_0}z(t)=z(t_0)$. Т.е. вектор – функция $\overline{r}=\overline{r}(t)$, непрерывна в точке $t=t_0$ тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны скалярные функции $x=x(t),y=y(t),z=z(t)$.

Из определения 7.4 и свойств пределов векторных функций скалярного аргумента точно так же, как для скалярных функций, следует, что:

1) сумма непрерывных (при $t=t_0$) вектор – функций есть вектор – функция непрерывная (при $t=t_0$);
2) произведение непрерывной (при $t=t_0$) вектор – функции на постоянное число есть вектор – функция непрерывная (при $t=t_0$).

7.4. Производная векторной функции скалярного аргумента

Определение 7.5. Пусть дана векторная функция скалярного аргумента $\overline{r}=\overline{r}(t)$, или $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$. Производной этой функции (в некоторой точке t) называется вектор

$$\overline{r}'(t)=\frac{d\overline{r}}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{r}(t+\Delta t)-\overline{r}(t)}{\Delta t}, \qquad (7.4)$$

если этот предел существует.

В (7.4) $\dfrac{\overline{r}(t+\Delta t)-\overline{r}(t)}{\Delta t}=\underbrace{\dfrac{1}{\Delta t}}_{\text{число}}\left[\underbrace{\overline{r}(t+\Delta t)-\overline{r}(t)}_{\text{вектор}}\right]$ – некоторая вектор – функция скалярного аргумента Δt; рассматривается её предел при $\Delta t\to 0$; $\overline{r}'(t)$ (если она существует) снова является вектор – функцией скалярного аргумента t.

Так как действиям над векторами соответствуют аналогичные действия над их координатами, то

$$\frac{\overline{r}(t+\Delta t)-\overline{r}(t)}{\Delta t}=\left\{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right\}.$$

По теореме 7.1 о пределе вектор – функции $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}$ существует тогда и только тогда, когда существуют $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=x'(t)$, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=y'(t)$, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}=z'(t)$, и при этом $\overline{r}'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 7.2. Производная вектор – функции скалярного аргумента $\overline{r}'(t)=\dfrac{d\overline{r}}{dt}$ в некоторой точке t существует тогда и только тогда, когда в этой точке существуют три производных $x'(t),y'(t),z'(t)$, и при этом $\overline{r}'(t)=\{x'(t),y'(t),z'(t)\}$, или $\dfrac{dr}{dt}=\left\{\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right\}$.

Отметим некоторые свойства производных вектор – функций скалярного аргумента:

1) $\dfrac{d\left[\overline{r}_1(t)\pm\overline{r}_2(t)\right]}{dt}=\dfrac{d\overline{r}_1(t)}{dt}\pm\dfrac{d\overline{r}_2(t)}{dt}$, если производные справа существуют;

2) $\dfrac{d\left[c\overline{r}(t)\right]}{dt}=c\dfrac{d\overline{r}(t)}{dt}$, где c – постоянная (если производная справа существует).

▲ Проверим, например, одну из этих формул:

$$\frac{d\left[\overline{r}_1(t)+\overline{r}_2(t)\right]}{dt}=\left\{\frac{d\left[x_1(t)+x_2(t)\right]}{dt},\frac{d\left[y_1(t)+y_2(t)\right]}{dt},\frac{d\left[z_1(t)+z_2(t)\right]}{dt}\right\}=$$
$$=\left\{\frac{dx_1(t)}{dt}+\frac{dx_2(t)}{dt},\frac{dy_1(t)}{dt}+\frac{dy_2(t)}{dt},\frac{dz_1(t)}{dt}+\frac{dz_2(t)}{dt}\right\}=$$
$$=\left\{\frac{dx_1(t)}{dt},\frac{dy_1(t)}{dt},\frac{dx_1(t)}{dt}\right\}+\left\{\frac{dx_2(t)}{dt},\frac{dy_2(t)}{dt},\frac{dz_2(t)}{dt}\right\}=\frac{d\overline{r}_1(t)}{dt}+\frac{d\overline{r}_2(t)}{dt}. \blacksquare$$

Геометрический смысл производной (рис. 46)

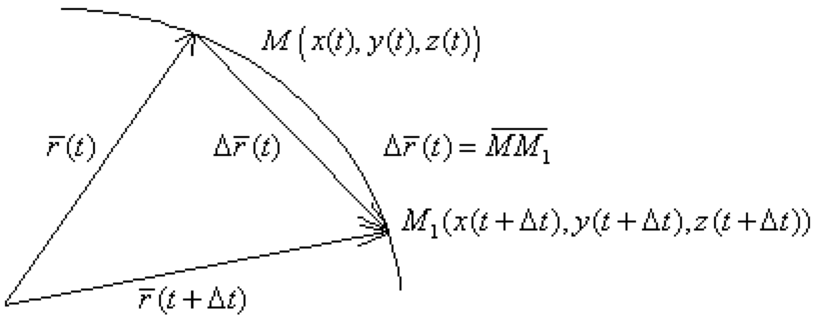

Рис. 46

$\overline{r}'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\overline{r}(t)}{\Delta t}$; $\Delta\overline{r}(t)=\overline{MM_1}$; вектор $\dfrac{\Delta\overline{r}(t)}{\Delta t}$ направлен вдоль прямой MM_1. При $\Delta t\to 0$ точка M_1 приближается к точке M, так как из существования $x'(t),\ y'(t),\ z'(t)$ следует непрерывность $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, а, значит, и непрерывность вектор – функции $\overline{r}(t)$ в соответствующей точке t.

Определение 7.6. Как и на плоскости, касательной к кривой в некоторой точке M называется предельное положение секущей MM_1 при $M_1\to M$, если такое существует.

Из только что приведенных рассуждений следует, что если $\overline{r}'(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\overline{r}(t)}{\Delta t}$ существует и отличен от нуля, то в соответствующей точке $M(x(t),y(t),z(t))$ кривая имеет касательную, и вектор $\overline{r}'(t)=\dfrac{d\overline{r}}{dt}$ направлен по касательной к кривой в точке M.

Уравнения касательной к пространственной кривой $\overline{r}=\overline{r}(t)$, или $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$, где $x_0=x(t_0), y_0=y(t_0), z_0=z(t_0)$ (в предположении $\overline{r}'(t_0)\neq 0$) это канонические уравнения прямой по точке M_0 и направляющему вектору $\overline{r}'(t_0)$:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}\,. \qquad (7.5)$$

Пример. Написать уравнение касательной к винтовой линии $\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \\ z=at \end{cases}$ в точке $t_0=\frac{\pi}{4}$.

Решение.

Нужно написать уравнение касательной при $t_0=\frac{\pi}{4}$.т.е. в точке $M_0(a\frac{\sqrt{2}}{2}, a\frac{\sqrt{2}}{2}, a\frac{\pi}{4})$;

$x'(t)=-a\sin t,\ y'(t)=a\cos t,\ z'(t)=a \Rightarrow x'(t_0)=-a\frac{\sqrt{2}}{2},\ y'(t_0)=a\frac{\sqrt{2}}{2},\ z'(t_0)=a$

$$\Rightarrow \frac{x-a\frac{\sqrt{2}}{2}}{-a\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{y-a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{z-a\frac{\pi}{4}}{a}\Rightarrow\frac{x-a\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=\frac{y-a\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}=\frac{z-a\frac{\pi a}{4}}{\sqrt{2}}\,.$$

Определение 7.7. *Нормальной плоскостью* к пространственной кривой $\bar{r}=\bar{r}(t)$ (или $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$) в некоторой точке кривой M_0 называется плоскость, проходящая через точку M_0 и перпендикулярная касательной к кривой в точке M_0 (рис. 47).

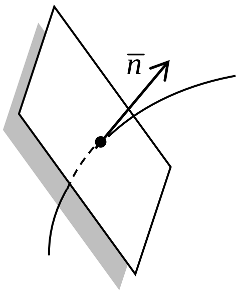

Рис. 47

Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)=M(x(t_0),y(t_0),z(t_0))$, тогда уравнение нормальной плоскости по точке M_0 и нормали $\bar{n}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$ имеет вид:

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0\,. \qquad (7.6)$$